

## تحليلية الفضاء

(c) تكون  $u$  و  $v$  و  $w$  مستوائية إذا وفقط إذا كانت إحداها تكتب بدلالة الأخرى مثلا :  $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$  .  
(d) إذا كانت  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  و  $\vec{w}$  غير مستوائية و  $\vec{0} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$  فإن  $\alpha = \beta = \gamma = 0$  .

### (II) المعلم في الفضاء

(1) نسمي معلما في الفضاء كل رباعي  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  حيث  $O$  نقطة من الفضاء و  $\vec{i}$  و  $\vec{j}$  و  $\vec{k}$  3متجهات غير مستوائية يعني أساس .  
(2) ليكن  $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  معلما في الفضاء .  
(a) لكل نقطة  $M$  من الفضاء المتجهة  $\vec{OM}$  تكتب بطريقة وحيدة على شكل  $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  . المتلوث  $(x, y, z)$  يسمى متلوث  
إحداثيات النقطة  $M$  بالنسبة المعلم  $R$  ونكتب  $M(x, y, z)$  أو  $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$   
**ملاحظة**  $M(x, y, z) \Leftrightarrow \vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$   
(b) نعتبر النقطتين  $A(x, y, z)$  و  $B(x', y', z')$   
(\*) لدينا  $\vec{AB}(x' - x, y' - y, z' - z)$   
(\*) إذا كان  $I$  منتصف القطعة  $[AB]$  فإن  
 $I(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}, \frac{z+z'}{2})$

### (III) المستقيم في الفضاء

#### (1) تعريف

لنكن  $A$  نقطة و  $\vec{u}$  متجهة . المستقيم المار من  $A$  والموجه بـ  $\vec{u}$  هو المجموعة التي نرمز لها بـ  $D(A, \vec{u})$  والمعرفة بـ

$$(D) \quad D(A, \vec{u}) = \{M \in E / \vec{AM} = \alpha\vec{u}\}$$

**ملاحظة**  $M \in D(A, \vec{u}) \Leftrightarrow \vec{AM}$  و  $\vec{u}$  مستقيمتين

#### (2) تمثيل باراميتري لمستقيم

تمثيل باراميتري للمستقيم  $(D)$  المار من  $A(x_0, y_0, z_0)$  والموجه

$$(D): \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

بـ المتجهة  $\vec{u}(a, b, c)$  هو :

#### (3) معادلتان ديكارتيتان لمستقيم .

ليكن  $(D)$  المستقيم المار من  $A(x_0, y_0, z_0)$  والموجه بـ  $\vec{u}(a, b, c)$   
(\*) إذا كانت الأعداد  $a$  و  $b$  و  $c$  غير منعدمة فإن معادلتنا  $(D)$  هما :

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

(\*) إذا كان عدد واحد منعدم وعددين غير منعدمين مثلا  $a \neq 0, b = 0$  و

$$\begin{cases} \frac{x - x_0}{a} = \frac{z - z_0}{c} \\ y - y_0 = 0 \end{cases} \quad (D) \text{ هما :}$$

### (I) الأساس في الفضاء التجهي $V_3$

(1) لنكن  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  و  $\vec{w}$  3متجهات من  $V_3$  و  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  4نقط بحيث  $\vec{AB} = \vec{u}$  و  $\vec{AC} = \vec{v}$  و  $\vec{AD} = \vec{w}$  .  
نقول إن المتجهات  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  و  $\vec{w}$  مستوائية إذا وفقط إذا كانت النقطة  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  مستوائية .  
نقول إن المتجهات  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  و  $\vec{w}$  غير مستوائية إذا وفقط إذا كانت النقطة  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  غير مستوائية .  
(2) لنكن  $\vec{i}$  و  $\vec{j}$  و  $\vec{k}$  3متجهات غير مستوائية من  $V_3$  .  
(\*) كل متجهة من  $V_3$  تكتب بطريقة وحيدة على شكل  
 $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$   
(\*) نقول إن المتلوث  $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  أساس في الفضاء  $V_3$  .  
(\*) إذا كانت  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  فإن المتلوث  $(x, y, z)$  يسمى متلوث إحداثيات المتجهة  $\vec{u}$  بالنسبة للأساس  $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  ونكتب  
 $\vec{u} : (x, y, z)$  أو  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  .

(3) ليكن  $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  أساس في الفضاء  $V_3$  .

(a) نعتبر المتجهتين  $\vec{u} : (x, y, z)$  و  $\vec{v} : (x', y', z')$   
لدينا  $\alpha\vec{u} : (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$  و  $\vec{u} + \vec{v} : (x + x', y + y', z + z')$   
(b) نعتبر المتجهتين  $\vec{u} : (x, y, z)$  و  $\vec{v} : (x', y', z')$   
من أجل دراسة استقامية المتجهتين  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  نقوم بحساب المحددات الثلاثة المستخرجة من جدول إحداثيات  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  وهي :

$$\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \text{ و } \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \text{ و } \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$$

(\*) إذا كانت هذه المحددات الثلاثة منعدمة فإن  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  مستقيمتين .

(\*) إذا كانت إحدى هذه المحددات غير منعدمة فإن  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  غير مستقيمتين .

(c) نعتبر المتجهات  $\vec{u} : (x, y, z)$  و  $\vec{v} : (x', y', z')$  و  $\vec{w} : (x'', y'', z'')$  .

(\*) نسمي محدث المتجهات  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  و  $\vec{w}$  العدد الذي نرمز له بالرمز  $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  والمعرف بما يلي :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} x' & x'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}$$

(\*) تكون  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  و  $\vec{w}$  مستوائية إذا وفقط إذا كان  $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$

#### ملاحظة

(a) تكون  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  مستقيمتين إذا وفقط إذا كان  $\vec{v} = \alpha\vec{u}$  أو  $\vec{u} = \alpha\vec{v}$   
(b) إذا كانت  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  غير مستقيمتين و  $\vec{0} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$  فإن  $\alpha = \beta = 0$

$$M(x, y, z) \in (P) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-x_0 & a & a' \\ y-y_0 & b & b' \\ z-z_0 & c & c' \end{vmatrix} = 0$$

نقوم بالنشر ونحصل على معادلة على شكل  $Ax + By + Cz + D = 0$  حيث  $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$ .

#### (4) تقاطع مستويين .

ملاحظة : من أجل دراسة تقاطع مستويين يستحسن استعمال معادلتين ديكارتيتين  $(P): ax + by + cz + d = 0$  ونعتبر المستويين :

$$(Q): a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

من أجل دراسة تقاطع  $(P)$  و  $(Q)$  نقوم بحساب المحددات

$$\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} \text{ و } \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} \text{ و } \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

(a) إذا كانت هذه المحددات الثلاثة منعدمة فإن  $(P) \parallel (Q)$ .

(b) إذا كانت إحدى هذه المحددات غير منعدمة فإن  $(P)$  و  $(Q)$  يتقاطعان وفق المستقيم  $(D)$  الذي معادلته الديكارتية هما :

$$(D): \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

#### (5) تقاطع مستوى ومستقيم .

ملاحظة : من أجل دراسة تقاطع مستوى ومستقيم يستحسن استعمال معادلة ديكارتية بالنسبة للمستوى وتمثيل باراميتري بالنسبة للمستقيم .  
نعتبر المستوى  $(P): \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$  والمستقيم

$$(\Delta): \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

من أجل دراسة تقاطع  $(P)$  و  $(\Delta)$  نقوم بحل النظام :

$$\begin{cases} x = x_0 + at & (1) \\ y = y_0 + bt & (2) \\ z = z_0 + ct & (3) \\ \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0 & (4) \end{cases}$$

ولهذا نعوض  $x$  و  $y$  و  $z$  في (4) نحصل على معادلة من الدرجة (I) بمجهول واحد  $t$ .

(a) إذا كان لهذه المعادلة حلا  $t = t_0$  فإن  $(\Delta)$  يقطع  $(P)$  في نقطة (نحصل على إحداثياتها بتعويض  $t$  في (1) و (2) و (3)).

(b) إذا كان لهذه المعادلة مالا نهاية له من الحلول  $(0 = 0)$  فإن

$$(\Delta) \subset (P)$$

(c) إذا كانت هذه المعادلة لا تقبل حلا " $(4 = 0)$  مثلا " فإن  $(\Delta)$  و  $(P)$  متوازيان قطعاً .

#### ملاحظة

(\*)  $D(A, \vec{u}) \parallel D(B, \vec{v})$  تكافئ  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  مستقيمتين

(\*)  $D(A, \vec{u}) \parallel P(B, \vec{v}, \vec{w})$  تكافئ  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  و  $\vec{w}$  مستوائية

(\*)  $P(A, \vec{u}, \vec{v}) \parallel P(B, \vec{x}, \vec{y})$  تكافئ  $\vec{u}$  و  $\vec{x}$  و  $\vec{y}$  مستوائية

و  $\vec{v}$  و  $\vec{x}$  و  $\vec{y}$  مستوائية .

(\*) إذا كان عددين منعدمين وعدد واحد غير منعدمين مثلاً  $a = 0$  ،  $b = 0$

$$\begin{cases} x - x_0 = 0 \\ y - y_0 = 0 \end{cases} \text{ و } c \neq 0 \text{ فإن معادلتا } (D) \text{ هما :}$$

#### (4) الأوضاع النسبية لمستقيمين .

ملاحظة : من أجل دراسة الأوضاع النسبية لمستقيمين يستحسن استعمال تمثيلين باراميتريين .  
نعتبر المستقيمين

$$(\Delta): \begin{cases} x = x_1 + a't' \\ y = y_1 + b't' \\ z = z_1 + c't' \end{cases} \text{ و } (\Delta'): \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

لدينا  $(\Delta)$  مار من  $A(x_0, y_0, z_0)$  وموجه ب  $\vec{u}(a, b, c)$

و  $(\Delta')$  مار من  $B(x_1, y_1, z_1)$  وموجه ب  $\vec{u}'(a', b', c')$

من أجل دراسة تقاطع  $(\Delta)$  و  $(\Delta')$  نفق بدراسة استقامية  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$

(a) إذا كانت  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  مستقيمتين فإن  $(\Delta) \parallel (\Delta')$  . ولمعرفة هل  $(\Delta)$  و  $(\Delta')$  منطبقان أم متوازيان قطعاً . نتحقق هل  $A \in (\Delta')$  ؟

(\*) إذا كان  $A \in (\Delta')$  فإن  $(\Delta) = (\Delta')$  .

(\*) إذا كان  $A \notin (\Delta')$  فإن  $(\Delta)$  و  $(\Delta')$  متوازيان قطعاً .

(b) إذا كانت  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  غير مستقيمتين فإن  $(\Delta)$  و  $(\Delta')$  متقطعان أو غير مستوائيين ، ولمعرفة أي حالة لدينا نقوم بحل النظام :

$$(S) \begin{cases} x_0 + at = x_1 + a't' \\ y_0 + bt = y_1 + b't' \\ z_0 + ct = z_1 + c't' \end{cases}$$

في الثالثة .

(i) إذا كان للنظمة  $(S)$  حلا فإن  $(\Delta)$  و  $(\Delta')$  متقطعان وللحصول على

إحداثيات نقطة التقاطع نعوض  $t$  في تمثيل  $(\Delta)$  أو  $t'$  في تمثيل  $(\Delta')$  .

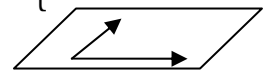
(ii) إذا كانت للنظمة  $(S)$  لا تقبل حلا فإن  $(\Delta)$  و  $(\Delta')$  غير مستوائيين.

### (IV) المستوى في الفضاء

#### (1) تعريف

لتكن  $A$  نقطة و  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  متجهتين . المستوى المار من  $A$  والموجه ب  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  هو المجموعة التي نرمز لها ب  $P(A, \vec{u}, \vec{v})$  والمعرفة ب

$$P(A, \vec{u}, \vec{v}) = \{M \in E / \overrightarrow{AM} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}\}$$



ملاحظة :  $M \in P(A, \vec{u}, \vec{v}) \Leftrightarrow (\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v})$  مستوائية

#### (2) تمثيل باراميتري لمستوى

ليكن  $(P)$  المستوى المار من  $A(x_0, y_0, z_0)$  والموجه بالمتجهتين

$\vec{u}(a, b, c)$  و  $\vec{v}(a', b', c')$  تمثيل باراميتري للمستوى  $(P)$  هو :

$$(P): \begin{cases} x = x_0 + at + a't' \\ y = y_0 + bt + b't' \\ z = z_0 + ct + c't' \end{cases} (t, t' \in \mathbb{R})$$

#### (3) معادلة ديكارتية لمستوى .

ليكن  $(P)$  المستوى المار من  $A(x_0, y_0, z_0)$  والموجه بالمتجهتين

$\vec{u}(a, b, c)$  و  $\vec{v}(a', b', c')$

للحصول على معادلة ديكارتية لـ  $(P)$  نتبع ما يلي :