

دراسة الدوال

4) اشتقاق دالة على مجال - الدالة المشتقة	
(a) نقول إن f قابلة للإشتقاق على مجال مفتوح I إذا كانت قابلة للإشتقاق في كل نقطة من I (b) نقول إن f قابلة للإشتقاق على المجال $[a, b]$ إذا كانت قابلة للإشتقاق على المجال $]a, b[$ وعلى يمين a وعلى يسار b. (c) إذا كانت f قابلة للإشتقاق على I فإن الدالة $f': x \rightarrow f'(x)$ تسمى الدالة المشتقة (d) إذا كانت f' قابلة للإشتقاق على مجال I فإن الدالة المشتقة للدالة f' تسمى المشتقة الثانية للدالة f ونرمز لها بـ f''. (e) الدوال المشتقة لبعض الدوال الاعتيادية .	
$(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$ (10)	$(a)' = 0$ (1)
$(\frac{1}{f})' = -\frac{f'}{f^2}$ (11)	$(x)' = 1$ (2)
$(\sin x)' = \cos x$ (13)	$(x^n)' = nx^{n-1}$ (4)
$(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$ (5)	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (6)
$(\sin(ax+b))' = a \cos(ax+b)$ (14)	$(f+g)' = f' + g'$ (7)
$(\cos x)' = -\sin x$ (15)	$(\cos(ax+b))' = -a \sin(ax+b)$ (16)
$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x$ (17)	$(fg)' = f'g + g'f$ (8)
$(f^n)' = nf' f^{n-1}$ (18)	$(af)' = af'$ (9)
$(\tan(ax+b))' = a(1 + \tan^2(ax+b))$ (19)	
ملاحظة (a) لكن f دالة معرفة على مجال I ولا تحتوي على $\sqrt{\quad}$. لكي ندرس اشتقاق f في x_0 نتحقق هل f تغير صيغتها في x_0 أم لا ؟ (*) إذا كنت f لا تغير صيغتها في x_0 نقوم بحساب $f'(x)$ ونعوض x بـ x_0 (*) إذا كنت f تغير صيغتها في x_0 ندرس الإشتقاق باستعمال معدل التغير . (b) إذا كانت f' تتعدم في x_0 ($f'(x_0) = 0$) فإن C_f يقبل مماسا عند النقطة $M(x_0, f(x_0))$ موازيا لمحور الأفقي .	
5) تغيرات دالة	
لكن f دالة قابلة للإشتقاق على مجال I .	
(a) تكون f تزايدية على I إذا وفقط إذا كان $(\forall x \in I): f'(x) \geq 0$	
(b) تكون f تزايدية قطعاً على I إذا وفقط إذا كان $(\forall x \in I): f'(x) > 0$ والأعداد التي تتعدم فيها f' معدودة .	
(c) تكون f تناقصية على I إذا وفقط إذا كان $(\forall x \in I): f'(x) \leq 0$	
(d) تكون f تناقصية قطعاً على I إذا وفقط إذا كان $(\forall x \in I): f'(x) < 0$ والأعداد التي تتعدم فيها f' معدودة .	

I) الإشتقاق	
1) تعاريف	
(a) تكون f قابلة للإشتقاق في x_0 إذا كان $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l \in IR$ ونكتب $f'(x_0) = l$ العدد l يسمى العدد المشتق للدالة f في x_0 (b) تكون f قابلة للإشتقاق على يمين x_0 إذا وفقط إذا كان : $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l \in IR$ ونكتب $f'_d(x_0) = l$ (c) تكون f قابلة للإشتقاق على يسار x_0 إذا وفقط إذا كان : $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l \in IR$ ونكتب $f'_g(x_0) = l$ (d) تكون f قابلة للإشتقاق في x_0 إذا وفقط إذا كانت قابلة للإشتقاق على يمين x_0 وعلى يسار x_0 و $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$ (e) (*) (f متصلة في x_0) $\Rightarrow$ (f قابلة للإشتقاق في x_0) (*) (f غير قابلة للإشتقاق في x_0) $\Rightarrow$ (f غير متصلة في x_0)	
2) التأويل الهندسي :	
(a) إذا كانت f قابلة للإشتقاق في x_0 فإن C_f يقبل مماسا (T) عند النقطة $M(x_0, f(x_0))$ معمله الموجه $f'(x_0)$ معادلته $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ وسيكون C_f على أحد الأشكال التالية : (b) إذا كانت f قابلة للإشتقاق على يمين x_0 فإن C_f يقبل نصف مماس (T_1) عند النقطة $M(x_0, f(x_0))$ معمله الموجه $f'_d(x_0)$ معادلته $y = f'_d(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ وسيكون C_f على أحد الشكلين التاليين : (c) لدينا نتيجة مماثلة بالنسبة للإشتقاق على اليسار . ملاحظة (*) إذا كانت f قابلة للإشتقاق على بين x_0 وعلى يسار x_0 و $f'_d(x_0) \neq f'_g(x_0)$ فإن f غير قابلة للإشتقاق في x_0 إذن C_f لا يقبل مماسا في M لكنه يقبل نصفي مماس غير منطبقين وسيكون C_f على أحد الأشكال : (*) إذا كانت f قابلة للإشتقاق في x_0 فإن C_f "لا ينكسر" في M وإذا كانت f غير قابلة للإشتقاق في x_0 فإن C_f "ينكسر" في M ويكون زاوية . ونقول إن M نقطة مزوات .	
3) الدالة التاليفية المماسية لدالة .	
(a) إذا كانت f قابلة للإشتقاق في x_0 فإن الدالة $u(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ تسمى الدالة التاليفية المماسية للدالة f في x_0 (b) وإذا كان a جد قريب من x_0 فإن $u(a)$ قيمة مقربة لـ $f(a)$ ($f(a) \approx u(a)$)	

C_f أو إذا كانت $f(x)$ على شكل $f(x) = ax + b + h(x)$ مع $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 0$.
(4) محور تماثل - مركز تماثل (a) يكون المستقيم $x = a$: محور تماثل C_f إذا وفقط إذا كان : (*) لكل x من D_f لدينا $2a - x \in D_f$ (*) $(\forall x \in D_f) : f(2a - x) = f(x)$ (b) تكون النقطة $\Omega(a, b)$ مركز تماثل C_f إذا وفقط إذا كان : (*) لكل x من D_f لدينا $2a - x \in D_f$ (*) $(\forall x \in D_f) : f(2a - x) = 2b - f(x)$
(III) الدوال الدورية
(1) تعريف (a) نقول إن الدالة f دورية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي غير منعدم T بحيث $(\forall x \in D_f) : f(x + T) = f(x)$ وكل عدد T يحقق هذا الشرط يسمى دور f (b) إذا كان T دورا للدالة f فإن كل عدد kT دور لـ f ($k \in \mathbb{Z}$) (c) نختار عادة أصغر دور موجب قطعاً . ملاحظة (a) لكي نبين أن f دورية يجب أولاً ملاحظة الدور ثم نتحقق منه (b) $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ (*) $\cos(x + \pi) = -\cos x$ (*) $\sin(x + k\pi) = \sin x$ (*) $\sin(x + \pi) = -\sin x$ (*) $\tan(x + k\pi) = \tan x$ (*)
(2) ادوار بعض الدوال الاعتيادية . (a) $f(x) = \sin(ax + b)$ أو $f(x) = \cos(ax + b)$ $T = \frac{2\pi}{ a }$ (b) $f(x) = \sin^2(ax + b)$ أو $f(x) = \cos^2(ax + b)$ $T = \frac{\pi}{ a }$ (c) $f(x) = \tan(ax + b)$ $T = \frac{\pi}{ a }$ (d) لكي نحدد دور $f + g$ نحدد أدوار كل من f و g و نأخذ أصغر دور مشترك .
(3) رتبة دالة دورية . لتكن f دالة دورية دورها T . إذا كانت f رتيبة على $[a, b]$ فإن f رتيبة على $[a + T, b + T]$ ولها نفس الرتبة .
(4) منحني دالة دورية (a) إذا كانت f دالة دورية دورها T فيكفي إنشاء C_f على مجال سعته T (عادت نأخذ $D_f \cap [0, T]$) ثم إزاحتها بإزاحة التي متجهتها $T\vec{i}$ ومن أجل إزاحة هذا الجزئ نبحث عن النقط المهمة التي تكونه ونزيحها بإضافة T إلى أفصولها والإحتفاظ بآرئوب إذا أردنا الإزاحة نحو اليمين ونطرح T من الأفصول إذا أردنا الإزاحة نحو اليسار . (b) إذا كانت f دالة دورية دورها T زوجية (أو فردية) فيكفي إنشاء C_f على $D_f \cap [0, \frac{T}{2}]$ ثم إنشاء المماثل بالنسبة لمحور الأرائيب (أو أصل المعلم) ثم الإزاحة .

(6) مطارف دالة . لتكن f دالة قابلة للإشتقاق على مجال I و $x_0 \in I$. يكون للدالة f مطرافاً نسبياً في x_0 إذا وفقط إذا كانت f' تتقدم وتغير الإشارة في x_0 (II) التمثيل المباني لدالة
(1) التقعر لتكن f دالة قابلة للإشتقاق مرتين على مجال I . (a) يكون C_f محدباً () إذا وفقط إذا كان $(\forall x \in I) : f''(x) \geq 0$ (b) يكون C_f مقعراً () إذا وفقط إذا كان $(\forall x \in I) : f''(x) \leq 0$
(2) نقط انعطاف (a) لتكن f دالة قابلة للإشتقاق في x_0 و (T) المماس لـ C_f في $M(x_0, f(x_0))$ نقول إن M نقطة انعطاف إذا كان C_f يغير التقعر في M (C_f يخترق (T)) : (b) لتكن f دالة قابلة للإشتقاق مرتين على مجال I و $x_0 \in I$ تكون النقطة $M(x_0, f(x_0))$ نقطة انعطاف إذا وفقط إذا كان f'' تتقدم وتغير إشارة في x_0 . ملاحظة إذا كانت f' تتقدم ولا تتغير الإشارة في x_0 فإن $M(x_0, f(x_0))$ نقطة انعطاف ويكون المماس فيها موازياً لمحور الأفاصيل . (b) إذا أردنا تحديد جميع نقط انعطاف أو دراسة التقعر نحسب $f''(x)$ وندرس إشارتها .
(3) الفروع اللانهائية . (a) تعريف نقول إن C_f يقبل فرعاً لانهائياً إذا كانت لدينا إحدى الحالات التالية : $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ أو $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ أو $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$. (b) تصنيف الفروع اللانهائية : (1) إذا كان $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ فإن المستقيم $x = a$: Δ : مقارب لـ C_f بجوار a . (2) إذا كان $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ فإن المستقيم $y = a$: Δ : مقارب لـ C_f بجوار ∞ . (3) إذا كان $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ نقوم بحساب $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$: (a) إذا كان $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$ فإن C_f يقبل فرعاً شلجيميا اتجاهه محور الأرائيب بجوار ∞ . (b) إذا كان $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ فإن C_f يقبل فرعاً شلجيميا اتجاهه محور الأفاصيل بجوار ∞ . (c) إذا كان $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0$ نقوم بحساب $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax)$: (i) إذا كان $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = b$ فإن المستقيم $y = ax + b$: Δ : مقارب لـ C_f بجوار ∞ . (ii) إذا كان $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = \infty$ فإن C_f يقبل فرعاً شلجيميا اتجاهه $y = ax$ بجوار ∞ . ملاحظة يكون المستقيم $y = ax + b$: Δ : مقارباً لـ C_f بجوار ∞ إذا وفقط إذا كان $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ ونستعمل هذه الخاصية إذا كان السؤال هو بين أن $y = ax + b$: Δ : مقارباً لـ