

قابلية الاشتقاق على مجال والدالة المشتقة :

نقول بأن الدالة f قابلة للاشتقاق على I إذا كانت قابلة

للاشتقاق في كل نقطة من I

الدالة التي تربط كل عنصر x بعدده المشتق $f'(x)$

تسمى الدالة المشتقة للدالة ونرمز بـ f'

مشتقة دوال إعتيادية والعمليات :

$f'(x) = 0$	$f(x) = a$
$f'(x) = a$	$f(x) = ax + b$
$f'(x) = nx^{n-1}$	$f(x) = x^n ; n \in \mathbb{N}^*$
$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$	$f(x) = \frac{1}{x}$
$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$f(x) = \sqrt{x}$
$f'(x) = a \cos(ax + b)$	$f(x) = \sin(ax + b)$
$f'(x) = -a \sin(ax + b)$	$f(x) = \cos(ax + b)$
$f'(x) = a(1 + \tan^2(ax + b))$	$f(x) = \tan(ax + b)$

أمثلة : أحسب الدالة المشتقة للدالة f في الحالات التالية :

$$f(x) = \sin x, \quad f(x) = x^2, \quad f(x) = x^4$$

$$f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right), \quad f(x) = \sin 3x, \quad f(x) = \cos x$$

$$f(x) = \sqrt{3x - 5}, \quad f(x) = \tan\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}\right)$$

العمليات على الدوال القابلة للاشتقاق :

الجمع: $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$

الحداء: $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

الكسب: $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$

الأس: $((g(x))^n)' = n(g(x))^{n-1}g'(x)$

حالات خاصة : $(kg(x))' = k g'(x)$

حيث $k \in \mathbb{R}$ $\left(\frac{k}{g(x)}\right)' = \frac{-kg'(x)}{(g(x))^2}$

أمثلة : أحسب مشتقة الدالة f في الحالات التالية :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 5x - 7 \quad ①$$

$$f(x) = \frac{3}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 15 \quad ②$$

$$f(x) = 2x + 3 - \frac{1}{x-2} \quad ④ \quad f(x) = x^2 + x + 2 \quad ③$$

$$f(x) = \sin 3x + 3 \cos 2x \quad ⑤$$

$$f(x) = \frac{x^2}{x+3} \quad ⑦ \quad f(x) = (2x+1)\sqrt{x} \quad ⑥$$

$$f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^3} \quad ⑨ \quad f(x) = (x^2 - 2x)^3 \quad ⑧$$

$$f(x) = \sin^3\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \quad ⑩ \quad f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 - 2x + 2}$$

الدالة المشتقة ورتابة دالة :

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على I و f' مشتقتها

إذا كان $f'(x) \geq 0$ فإن f تكون تزايدية

إذا كان $f'(x) \leq 0$ فإن f تكون تناقصية

إذا كان $f'(x) = 0$ فإن f تكون ثابتة

تمرين رقم 1

نعتبر الدالة $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

1) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2) أحسب الدالة المشتقة $f'(x)$ وأدرس تغيرات f

ثم ضع جدول تغيراتها

تمرين رقم 2

نعتبر الدالة $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$

1) حدد D_f وأحسب نهايات f عند محددات D_f

2) أحسب الدالة المشتقة $f'(x)$

3) ضع جدول تغيرات الدالة f

تمرين رقم 3

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{x^2 - 4} & x > 2 \\ f(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x+1)^2} & x \leq 2 \end{cases}$$

1) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2) أحسب $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

3) أدرس قابلية اشتقاق f على يسار 2

4) أحسن المشتقة $f'(x)$ ثم ضع جدول تغيرات يسار 0