

تعريف :

نقول بأن f دالة قابلة للاشتقاق في x_0 إذا كان للنسبة $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ نهاية منتهية / في x_0

ل / يسمى العدد المشتق للدالة f في x_0 ونرمز له ب: $f'(x_0) = l$ ونكتب $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

تأويل هندسي :

في هذه الحالة نقول بأن C_f يقبل في النقطة x_0 مستقيم مماس معادلته :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

التمرين الأول :

أدرس قابلية اشتقاق الدالة f في النقطة x_0 في الحالات التالية :

$$① \quad x_0 = 2 ; f(x) = \frac{x+1}{2x-1}$$

$$② \quad x_0 = -1 ; f(x) = \frac{2x^2 + x + 1}{x-1}$$

$$③ \quad x_0 = 3 ; f(x) = \sqrt{2x+3} - 2$$

$$④ \quad x_0 = 0 ; f(x) = x + \cos x$$

$$⑤ \quad x_0 = 0 ; f(x) = \frac{x|x| + x - 1}{x+1}$$

$$⑥ \quad \begin{cases} f(x) = \frac{(1 - \cos x)^2}{x^3} & x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

$$⑦ \quad \begin{cases} f(x) = \frac{1 - \cos 3x}{\sin 2x} & x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

$$⑧ \quad x_0 = 0 ; \begin{cases} f(x) = \frac{x - 2 \sin x}{x - \sin 2x} & x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

قابلية الاشتقاق على يمين وعلى يسار النقطة x_0 :

نقول بأن f دالة قابلة للاشتقاق في x_0 على اليمين إذا كان للنسبة $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ نهاية

منتهية l_1 عندما تؤول x إلى x_0 على يمين x_0 ($x > x_0$)

l_1 يسمى العدد المشتق للدالة f على يمين x_0 ونرمز له ب:

$$f'_d(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{ونكتب} \quad f'_d(x_0) = l_1$$

نقول بأن f دالة قابلة للاشتقاق في x_0 على اليسار إذا كان للنسبة $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ نهاية

منتهية l_2 عندما تؤول x إلى x_0 على يسار x_0 ($x < x_0$)

l_2 يسمى العدد المشتق للدالة f على يسار x_0 ونرمز له ب:

$$f'_g(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{ونكتب} \quad f'_g(x_0) = l_2$$

خاصية :

تكون f قابلة للاشتقاق في x_0 إذا وفقط إذا كانت f قابلة للاشتقاق على يمين وعلى يسار x_0 و $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$

التمرين الثاني :

أدرس قابلية اشتقاق f على يمين وعلى يسار x_0 في الحالات التالية :

$$① \quad x_0 = 0 ; f(x) = \frac{1 - |x|}{|x| + 1}$$

$$② \quad x_0 = 0 ; f(x) = |x| - \cos x$$

$$③ \quad x_0 = 2 ; f(x) = \frac{x + |x - 2|}{x - 1}$$

$$④ \quad x_0 = -1 ; f(x) = \frac{|x^2 + x| + 2}{|x| + 1}$$

التمرين الثالث :

نعتبر الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{2x^2}{x-1} & x > 0 \\ f(x) = \frac{x}{x^2-1} & x \leq 0 \end{cases}$$

$$① \quad \text{أحسب} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$② \quad \text{أحسب} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) \quad \text{و} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x)$$

$$③ \quad \text{أحسب} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) \quad \text{و} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x)$$

$$④ \quad \text{أدرس قابلية اشتقاق} \quad f \quad \text{على يمين وعلى يسار} \quad 0$$