

ملخصى وقواعدى فى الرياضيات لمستوى الأولى باك علوم تجريبية
من انجاز : الأستاذ نجيب عثمانى أستاذ مادة الرياضيات فى الثانوى تاهيلي

ملخص درس الاشتقاق

I. قابلية اشتقاق دالة عددية فى نقطة

1) تعريف : لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I

و a عنصرا من I

نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق فى النقطة a إذا وجد عدد حقيقي l

بحيث : $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$

l يسمى العدد المشتق للدالة فى النقطة a و نرمز له بالرمز : $f'(a)$

ونكتب : $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$

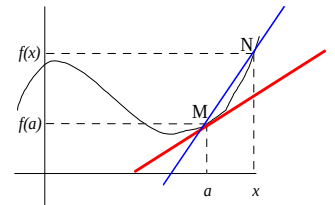
ملاحظة : الكتابة : $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$

تكافئ الكتابة : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$

(2) التأويل الهندسي للعدد المشتق - معادلة مماس لمنحنى دالة فى نقطة

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق فى نقطة a و (C_f) منحناها فى معلم متعامد

منظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$.



المستقيم (Δ) المار من النقطة $M(a; f(a))$

و الذي معاملته الموجه هو $f'(a)$ يسمى المماس للمنحنى

(C_f) فى النقطة M

خاصية : لتكن f دالة قابلة للاشتقاق فى نقطة a

معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) فى النقطة $M(a; f(a))$ هي :

$(\Delta) : y = f(a) + f'(a)(x - a)$

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x) = x^2 - 2x + 1$

1. باستعمال التعريف بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x_0 = 2$

2. حدد معادلة المماس للمنحنى الممثل للدالة f عند $x_0 = 2$.

(الجواب : 1) $f(2) = 2^2 - 2 \times 2 + 1 = 1$

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x + 1 - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x - 2}$

$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x - 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} x = 2$ ومنه f قابلة للاشتقاق عند : $x_0 = 1$

$2 = f'(2)$ وهو العدد المشتق عند $x_0 = 2$

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ (2)

$y = 2x - 3 \Leftrightarrow y = 1 + 2(x - 2) \Leftrightarrow y = f(2) + f'(2)(x - 2)$

II. الاشتقاق على اليمين - الاشتقاق على اليسار

مثال : نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x) = x^3 + |x|$

1. أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ (قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين عند $x_0 = 0$)

2. أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ (قابلية اشتقاق الدالة f على اليسار عند $x_0 = 0$)

3. هل الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x_0 = 0$ ؟

4. حدد معادلة لنصف مماس المنحنى الممثل للدالة f

على اليمين عند $x_0 = 0$.

5. حدد معادلة لنصف مماس المنحنى الممثل للدالة f

على اليسار عند $x_0 = 0$.

6. كيف نسمي النقطة $A(0, f(0))$ ؟

الجواب : $\begin{cases} f(x) = x^3 + x; x \geq 0 \\ f(x) = x^3 - x; x \leq 0 \end{cases}$ و $f(0) = 0^3 + |0| = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 + x - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x^2 + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 + 1 = 1$ (1)

ومنه f قابلة للاشتقاق على اليمين عند $x_0 = 0$ و $1 = f'_d(0)$

وهو العدد المشتق على اليمين عند $x_0 = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3 - x - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(x^2 - 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 - 1 = -1$ (2)

ومنه f قابلة للاشتقاق على اليسار عند $x_0 = 0$ و $-1 = f'_g(0)$

وهو العدد المشتق على اليسار عند $x_0 = 0$

(3) f قابلة للاشتقاق على اليمين وعلى اليسار عند $x_0 = 0$

ولكن : $f'_d(0) \neq f'_g(0)$

ومنه : f غير قابلة للاشتقاق عند $x_0 = 0$

(4) معادلة لنصف مماس منحنى الدالة f على اليمين عند $x_0 = 0$.

$y = f(x_0) + f'_d(x_0)(x - x_0)$

$(\Delta_d) : y = x \Leftrightarrow y = 0 + 1(x - 0) \Leftrightarrow y = f(0) + f'_d(0)(x - 0)$

(5) معادلة لنصف مماس منحنى الدالة f على اليسار عند $x_0 = 0$.

$y = f(x_0) + f'_g(x_0)(x - x_0)$

$(\Delta_g) : y = -x \Leftrightarrow y = 0 - 1(x - 0) \Leftrightarrow y = f(0) + f'_g(0)(x - 0)$

(6) لدينا $f'_d(0) \neq f'_g(0)$ النقطة $A(0; f(0))$ تسمى نقطة مزواة

خاصية : لتكن f دالة عددية معرفة

على مجال مفتوح I و a عنصرا من I

f قابلة للاشتقاق على النقطة a تكافئ f قابلة

للاشتقاق على اليمين فى النقطة a و f قابلة للاشتقاق على اليسار فى

النقطة a و $f'_g(a) = f'_d(a)$

III. الدالة المشتقة لدالة عددية

1. الاشتقاق على مجال

تعريف : f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I نقول إن الدالة f

قابلة للاشتقاق على المجال I إذا كانت f قابلة للاشتقاق فى كل

نقطة من I

2. الدالة المشتقة

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I الدالة المشتقة للدالة f

هي الدالة التي نرمز لها بالرمز $f'(x)$ و المعرفة كما يلي : $f' : I \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow f'(x)$

IV. جدول للدوال المشتقة لدوال اعتيادية و العمليات حول الدوال المشتقة

الدالة	f' الدالة المشتقة
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = ax$	$f'(x) = a$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1} \quad n \in \mathbb{Z}^*$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos(ax + b)$	$f'(x) = -a \sin(ax + b)$
$f(x) = \sin(ax + b)$	$f'(x) = a \cos(ax + b)$
$f(x) = \tan x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

الدالة	f' الدالة المشتقة
$f(x) = \tan x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
$f(x) = u + v$	$f'(x) = u' + v'$
$f(x) = u - v$	$f'(x) = u' - v'$
$f(x) = k.u$	$f'(x) = k.u'$
$f(x) = u \times v$	$f'(x) = u' \times v + u \times v'$
$f(x) = u^n$	$f'(x) = nu^n \times u'$
$f(x) = \frac{1}{u}$	$f'(x) = -\frac{u'}{u^2}$
$f(x) = \frac{u}{v}$	$f'(x) = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$
$f(x) = \sqrt{u}$	$f'(x) = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

V. الدالة المشتقة الثانية-المشتقات المتتالية

مثال : نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x) = x^3 - 5x^2 + 4x - 2$
أحسب المشتقة الأولى و الثانية و الثالثة

الجواب:

$$f'(x) = (x^3 - 5x^2 + 4x - 2)' = 3x^2 - 5 \times 2x^1 + 4 - 0 = 3x^2 - 10x + 4$$

$$f''(x) = (3x^2 - 10x + 4)' = 6x - 10 \quad \text{و} \quad f'''(x) = (6x - 10)' = 6$$

VI. تطبيقات الدالة المشتقة:

1. رتبة دالة وإشارة مشتقاتها

خاصية: لتكن f دالة عددية قابلة للاشتقاق على مجال I

• f تزايدية على مجال I يعني $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$

• f تناقصية على مجال I يعني $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$

• f ثابتة على مجال I يعني $f'(x) = 0 \quad \forall x \in I$

2. مطايف دالة قابلة للاشتقاق

خاصية 1: لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I

و a عنصرا من I

إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق في النقطة a وتقبل مطرافا

في النقطة a فإن $f'(a) = 0$

خاصية 2: لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I و a

عنصرا من I

إذا كانت f' تنعدم في النقطة a تتغير إشارتها

فان $f(a)$ مطرافا للدالة f

3. حل معادلة تفاضلية

تعريف: ليكن ω عددا حقيقيا غير منعدم .

• المعادلة $y'' + \omega^2 y = 0$ ذات المجهول الدالة y حيث y''

مشتقتها الثانية تسمى معادلة تفاضلية.

• كل دالة f قابلة للاشتقاق مرتين على $\mathbb{R}$

وتحقق المتساوية : $f''(x) + \omega^2 f(x) = 0$ لكل x من $\mathbb{R}$

تسمى حلا للمعادلة التفاضلية $y'' + \omega^2 y = 0$.

خاصية: ليكن ω عددا حقيقيا غير منعدم .

الحل العام للمعادلة التفاضلية $y'' + \omega^2 y = 0$ هو مجموعة

الدوال y المعرفة كما يلي : $y: x \rightarrow \alpha \cos \omega x + \beta \sin \omega x$

حيث $\alpha \in \mathbb{R}$ و $\beta \in \mathbb{R}$

ملحوظة: حل المعادلة التفاضلية : $y'' + \omega^2 y = 0$

يعني تحديد الحل العام للمعادلة.

مثال: حل المعادلة التفاضلية التالية: $y'' + 16y = 0$

الجواب $y'' + 4^2 y = 0 \Leftrightarrow y'' + 16y = 0$

ومنه الحل العام للمعادلة التفاضلية $y'' + 16y = 0$

هو مجموعة الدوال y المعرفة كما يلي : $y: x \rightarrow \alpha \cos 4x + \beta \sin 4x$

حيث $\alpha \in \mathbb{R}$ و $\beta \in \mathbb{R}$