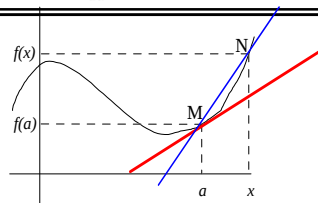


مذكرة رقم 9 في درس الاشتقاق

الأهداف و القدرات المنتظرة من الدرس :

محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
- قابلية اشتقاق دالة في نقطة x_0؛ العدد المشتق؛ التأويل الهندسي للعدد المشتق والمماس لمنحنى؛ تقريب دالة قابلة للاشتقاق في نقطة بدالة تآلفية؛ - الاشتقاق على اليمين؛ الاشتقاق على اليسار؛ نصف مماس؛ مماس أو نصف مماس عمودي؛ - الاشتقاق على مجال؛ المشتقة الأولى؛ المشتقة الثانية؛ المشتقات المتتالية؛ - اشتقاق الدوال $\frac{f}{g}$، $\frac{1}{f}$، fg، λf، $f+g$، $\sqrt{f}$؛ $f(ax+b)$؛ $(n \in \mathbb{Z})f^n$. - رتبة دالة وإشارة مشتقتها؛ مطابق دالة قابلة للاشتقاق على مجال. - المعادلة التفاضلية: $y'' + \omega^2 y = 0$.	- تقريب دالة بجوار نقطة x_0 بدالة تآلفية؛ - التعرف على أن العدد المشتق لدالة في x_0 هو المعامل الموجه لمماس لمنحنى الدالة في النقطة التي أفصولها x_0؛ - التعرف على مشتقات الدوال المرجعية؛ - التمكن من تقنيات حساب مشتقة دالة؛ - تحديد معادلة المماس لمنحنى دالة في نقطة وإنشاؤه؛ - تحديد رتبة دالة انطلاقا من دراسة إشارة مشتقتها؛ - تحديد إشارة دالة انطلاقا من جدول تغيراتها أو من تمثيلها المبياني؛ - حل مسائل تطبيقية حول القيم الدنوية والقيم القصوى.	- من بين الأمثلة التي يمكن معالجتها: تقريب الدوال المعرفة بما يلي: $h \rightarrow (1+h)^2$ و $h \rightarrow \sqrt{1+h}$ و $h \rightarrow \frac{1}{1+h}$ و $h \rightarrow (1+h)^3$ بجوار الصفر بدوال تآلفية. - توظف النهاية $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ في تحديد مشتقة كل من الدالتين $x \rightarrow \cos x$ و $x \rightarrow \sin x$. - تقبل المبرهنات المتعلقة بالرتابة وإشارة المشتقة الأولى؛ - يقبل الحل العام للمعادلة التفاضلية: $y'' + \omega^2 y = 0$.



المستقيم (Δ) المار من النقطة $M(a; f(a))$ والذي معاملته الموجه هو $f'(a)$ يسمى المماس للمنحنى

(C_f) في النقطة M

خاصية : لتكن f دالة قابلة للاشتقاق في نقطة a

معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) في النقطة $M(a; f(a))$ هي :

$$(\Delta) : y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

تمارين: 1: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x) = x^2 - 2x + 1$

1. باستعمال التعريف بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x_0 = 2$.

2. حدد معادلة المماس للمنحنى الممثل للدالة f عند $x_0 = 2$.

الجواب (1): $f(2) = 2^2 - 2 \times 2 + 1 = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x + 1 - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x - 2}$$

$$x_0 = 1 \text{ ومنه } f \text{ قابلة للاشتقاق عند : } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} x = 2$$

$$2 = f'(2) \text{ وهو العدد المشتق عند } x_0 = 2$$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (2)$$

$$y = 2x - 3 \Leftrightarrow y = 1 + 2(x - 2) \Leftrightarrow y = f(2) + f'(2)(x - 2)$$

II. الاشتقاق على اليمين - الاشتقاق على اليسار

مثال : نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x) = x^3 + |x|$

$$1. \text{ أحسب } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \text{ (قابلية اشتقاق الدالة } f \text{ على اليمين عند } x_0 = 0)$$

$$2. \text{ أحسب } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \text{ (قابلية اشتقاق الدالة } f \text{ على اليسار عند } x_0 = 0)$$

I. قابلية اشتقاق دالة عددية في نقطة

1. العدد المشتق

تعريف : لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I و a عنصرا من I

نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق في النقطة a إذا وجد عدد حقيقي l بحيث :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$$

l يسمى العدد المشتق للدالة في النقطة a ونرمز له بالرمز : $f'(a)$

$$\text{ونكتب : } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

$$\text{ملاحظة : الكتابة : } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

$$\text{تكافئ الكتابة : } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x) = 5x^2$

باستعمال التعريف أدرس اشتقاق الدالة f عند $x_0 = 1$

$$\text{الجواب : } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 - 5}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5(x^2 - 1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} 5(x+1) = 5 \times 2 = 10$$

ومنه f قابلة للاشتقاق عند : $x_0 = 1$

$$x_0 = 1 \text{ وهو العدد المشتق عند } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 10 = f'(1)$$

2. التأويل الهندسي للعدد المشتق - معادلة مماس لمنحنى دالة في نقطة

تعريف : لتكن f دالة قابلة للاشتقاق في نقطة a و (C_f) منحناها في

معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
x^2-1	$+$	0	$-$	$+$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1 - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} x + 1 = 2 \quad (1)$$

ومنه f قابلة للاشتقاق على اليمين عند $x_0 = 1$ و $2 = f'_d(1)$

وهو العدد المشتق على اليمين عند $x_0 = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x^2 - 1) - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} -(x+1) = -2 \quad (2)$$

ومنه f قابلة للاشتقاق على اليسار عند $x_0 = 1$ و $-2 = f'_d(1)$

وهو العدد المشتق على اليسار عند $x_0 = 1$

(3)

f قابلة للاشتقاق على اليمين وعلى اليسار عند $x_0 = 1$

ولكن : $f'_d(1) \neq f'_g(1)$

ومنه : f غير قابلة للاشتقاق عند $x_0 = 1$

(4) معادلة لنصف مماس منحنى الدالة f على اليمين عند $x_0 = 1$.

$$y = f(x_0) + f'_d(x_0)(x - x_0)$$

$$(\Delta_d): y = 2x - 4 \Leftrightarrow y = 0 + 2(x - 2) \Leftrightarrow y = f(1) + f'_d(1)(x - 1)$$

(5) معادلة لنصف مماس منحنى الدالة f على اليسار عند $x_0 = 0$.

$$y = f(x_0) + f'_g(x_0)(x - x_0)$$

$$(\Delta_g): y = -2x + 2 \Leftrightarrow y = 0 - 2(x - 1) \Leftrightarrow y = f(1) + f'_g(1)(x - 1)$$

(6) لدينا $f'_d(1) \neq f'_g(1)$ النقطة : $A(1; f(1))$ تسمى نقطة مزواة

III. الدالة المشتقة لدالة عددية

1. الاشتقاق على مجال

تعريف: f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I نقول إن الدالة f

قابلة للاشتقاق على المجال I إذا كانت f قابلة للاشتقاق في كل نقطة من I

2. الدالة المشتقة

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I الدالة المشتقة للدالة f

هي الدالة التي نرمز لها بالرمز $f'(x)$ و المعرفة كما يلي : $f': I \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \rightarrow f'(x)$

IV. جدول للدوال المشتقة لدوال اعتيادية والعمليات

حول الدوال المشتقة

(أنظر الجدول 1 و 2)

أمثلة: حدد الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

$$f(x) = x^{10} \quad (3) \quad f(x) = 3x - 5 \quad (2) \quad f(x) = 2 \quad (1)$$

$$f(x) = 6\sqrt{x} - 4 \quad (6) \quad f(x) = \frac{5}{x} \quad (5) \quad f(x) = 4x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 1 \quad (4)$$

$$f(x) = \cos(7x + 2) \quad (8) \quad f(x) = 6x^4 - \cos x + 3\sin x \quad (7)$$

$$f(x) = 3\tan x - 1 \quad (10) \quad f(x) = \frac{4}{5}\sin(5x + 4) \quad (9)$$

$$f(x) = \frac{1}{2x+1} \quad (12) \quad f(x) = x \cos x \quad (11)$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \quad (15) \quad f(x) = (3x + 4)^3 \quad (14) \quad f(x) = \frac{3x-1}{x+2} \quad (13)$$

$$f'(x) = (3x - 5)' = 3 \quad (2) \quad f'(x) = (2)' = 0 \quad (1) \quad \text{أجوبة:}$$

$$f'(x) = (x^{10})' = 10x^{10-1} = 10x^9 \quad (3)$$

$$f'(x) = \left(4x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 1\right)' = 4 \times 3x^{3-1} - \frac{1}{2} \times 2x - 0 = 12x^2 - x \quad (4)$$

3. هل الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x_0 = 0$ ؟

4. حدد معادلة لنصف مماس المنحنى الممثل للدالة f على اليمين عند

$x_0 = 0$

5. حدد معادلة لنصف مماس المنحنى الممثل للدالة f على اليسار عند

$x_0 = 0$

6. كيف نسمي النقطة $A(0, f(0))$ ؟

الجواب : $\begin{cases} f(x) = x^3 + x; x \geq 0 \\ f(x) = x^3 - x; x \leq 0 \end{cases}$ و $f(0) = 0^3 + |0| = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 + x - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x^2 + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 + 1 = 1 \quad (1)$$

ومنه f قابلة للاشتقاق على اليمين عند $x_0 = 0$ و $1 = f'_d(0)$

وهو العدد المشتق على اليمين عند $x_0 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3 - x - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(x^2 - 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 - 1 = -1 \quad (2)$$

ومنه f قابلة للاشتقاق على اليسار عند $x_0 = 0$ و $-1 = f'_g(0)$

وهو العدد المشتق على اليسار عند $x_0 = 0$

(3)

f قابلة للاشتقاق على اليمين وعلى اليسار عند $x_0 = 0$ ولكن :

$f'_d(0) \neq f'_g(0)$

ومنه : f غير قابلة للاشتقاق عند $x_0 = 0$

(4) معادلة لنصف مماس منحنى الدالة f على اليمين عند $x_0 = 0$.

$$y = f(x_0) + f'_d(x_0)(x - x_0)$$

$$(\Delta_d): y = x \Leftrightarrow y = 0 + 1(x - 0) \Leftrightarrow y = f(0) + f'_d(0)(x - 0)$$

(5) معادلة لنصف مماس منحنى الدالة f على اليسار عند $x_0 = 0$.

$$y = f(x_0) + f'_g(x_0)(x - x_0)$$

$$(\Delta_g): y = -x \Leftrightarrow y = 0 - 1(x - 0) \Leftrightarrow y = f(0) + f'_g(0)(x - 0)$$

(6) لدينا $f'_d(0) \neq f'_g(0)$ النقطة : $A(0; f(0))$ تسمى نقطة مزواة

خاصية: لتكن f دالة عددية معرفة

على مجال مفتوح I و a عنصرا من I

f قابلة للاشتقاق على النقطة a تكافئ f قابلة

للاشتقاق على اليمين في النقطة a و f قابلة للاشتقاق على اليسار في

النقطة a و $f'_g(a) = f'_d(a)$

تمرين 2: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x) = |x^2 - 1|$

1. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين عند $x_0 = 1$

2. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليسار عند $x_0 = 1$

3. هل الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x_0 = 1$ ؟

4. حدد معادلة لنصف مماس منحنى الدالة f على اليمين عند $x_0 = 1$.

5. حدد معادلة لنصف مماس منحنى الدالة f على اليسار عند $x_0 = 1$.

6. كيف نسمي النقطة $A(1, f(1))$ ؟

الجواب : $f(x) = |x^2 - 1|$ ندرس إشارة :

$$x = -1 \text{ و } x = 1 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 : x^2 - 1$$

ومنه : $\begin{cases} f(x) = x^2 - 1; x \in]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[\\ f(x) = -(x^2 - 1); x \in [-1; 1] \end{cases}$ و $f(1) = |1^2 - 1| = 0$

$$f'(x) = (4\sqrt{x} - 1)' = 4 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} - 0 = \frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}}{x} \quad (7)$$

$$f'(x) = (\cos 2x + 3\sin 3x)' = -2\sin 2x + 3 \times 3\cos 3x = -2\sin 2x + 9\cos 3x \quad (8)$$

$$f(x) = (3x^2 + 2)(7x + 1) \quad (9)$$

نستعمل القاعدة التالية : $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$

$$f'(x) = ((3x^2 + 2) \times (7x + 1))' = (3x^2 + 2)' \times (7x + 1) + (3x^2 + 2) \times (7x + 1)'$$

$$f'(x) = 6x \times (7x + 1) + 7(3x^2 + 2) = 42x^2 + 6x + 21x^2 + 14 = 63x^2 + 6x + 14$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2} \quad (10) \quad \text{نستعمل القاعدة التالية :}$$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{5x+7}\right)' = \frac{(5x+7)'}{(5x+7)^2} = -\frac{5}{(5x+7)^2}$$

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \quad \text{نستعمل القاعدة التالية :} \quad f(x) = \sqrt{x^2 + 8x} \quad (11)$$

$$f'(x) = (\sqrt{x^2 + 8x})' = \frac{(x^2 + 8x)'}{2\sqrt{x^2 + 8x}} = \frac{2x + 8}{2\sqrt{x^2 + 8x}} = \frac{x + 4}{\sqrt{x^2 + 8x}}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad \text{نستعمل القاعدة التالية :} \quad f(x) = \frac{7x}{x^3 + 1} \quad (12)$$

$$f'(x) = \left(\frac{7x}{x^3 + 1}\right)' = \frac{(7x)'(x^3 + 1) - 7x(x^3 + 1)'}{(x^3 + 1)^2} = \frac{7(x^3 + 1) - 7x \times 3x^2}{(x^3 + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{7x^3 + 7 - 21x^3}{(x^3 + 1)^2} = \frac{7 - 14x^3}{(x^3 + 1)^2}$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2} \quad \text{نستعمل القاعدة التالية :} \quad f(x) = \frac{1}{\sin x} \quad (13)$$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{\sin x}\right)' = \frac{(\sin x)'}{(\sin x)^2} = -\frac{\cos x}{(\sin x)^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad \text{نستعمل القاعدة التالية :} \quad f(x) = \frac{4x - 3}{2x - 1} \quad (14)$$

$$f'(x) = \left(\frac{4x - 3}{2x - 1}\right)' = \frac{(4x - 3)'(2x - 1) - (4x - 3)(2x - 1)'}{(2x - 1)^2} = \frac{4(2x - 1) - 2 \times (4x - 3)}{(2x - 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4(2x - 1) - 2 \times (4x - 3)}{(2x - 1)^2} = \frac{8x - 4 - 8x + 6}{(2x - 1)^2} = \frac{2}{(2x - 1)^2}$$

$$(u^n)' = nu^{n-1} \times u' \quad \text{نستعمل القاعدة التالية :} \quad f(x) = (2x - 1)^7 \quad (15)$$

$$f'(x) = ((2x - 1)^7)' = 7 \times (2x - 1)^{7-1} \times (2x - 1)' = 14(2x - 1)^6$$

V. الدالة المشتقة الثانية-المشتقات المتتالية

مثال : نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x) = x^3 - 5x^2 + 4x - 2$

أحسب المشتقة الأولى والثانية والثالثة

الجواب:

$$f'(x) = (x^3 - 5x^2 + 4x - 2)' = 3x^2 - 5 \times 2x + 4 - 0 = 3x^2 - 10x + 4$$

$$f'''(x) = (6x - 10)' = 6 \quad \text{و} \quad f''(x) = (3x^2 - 10x + 4)' = 6x - 10$$

VI. تطبيقات الدالة المشتقة:

1. رتبة دالة وإشارة مشتقاتها

خاصية: لتكن f دالة عددية قابلة للاشتقاق على مجال I

f تزايدية على مجال I يعني $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$

$$f'(x) = \left(\frac{5}{x}\right)' = \left(5 \times \frac{1}{x}\right)' = 5 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{5}{x^2} \quad (5)$$

$$f'(x) = (6\sqrt{x} - 4)' = 6 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} - 0 = \frac{3}{\sqrt{x}} = \frac{3\sqrt{x}}{x} \quad (6)$$

$$f'(x) = (6x^4 - \cos x + 3\sin x)' = 6 \times 4x^3 + \sin x + 3\cos x = 24x^3 + \sin x + 3\cos x \quad (7)$$

$$f'(x) = \cos(7x + 2)' = -7 \times \sin(7x + 2) \quad (8)$$

$$f'(x) = \frac{4}{5} \sin(5x + 4)' = 5 \times \frac{4}{5} \cos(5x + 4) = 4 \cos(5x + 4) \quad (9)$$

$$f'(x) = (3 \tan x - 1)' = 3 \times (1 + \tan^2 x) - 0 = 3(1 + \tan^2 x) \quad (10)$$

(11) نستعمل القاعدة التالية : $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$

$$f'(x) = (x \times \cos x)' = x' \times \cos x + x \times \cos' x = 1 \times \cos x - x \times \sin x = \cos x - x \sin x$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2} \quad \text{نستعمل القاعدة التالية :}$$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{2x+1}\right)' = -\frac{(2x+1)'}{(2x+1)^2} = -\frac{2}{(2x+1)^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad \text{نستعمل القاعدة التالية :} \quad f(x) = \frac{3x-1}{x+2} \quad (13)$$

$$f'(x) = \left(\frac{3x-1}{x+2}\right)' = \frac{(3x-1)'(x+2) - (3x-1)(x+2)'}{(x+2)^2} = \frac{3(x+2) - 1 \times (3x-1)}{(x+2)^2} = \frac{7}{(x+2)^2}$$

$$(u^n)' = nu^{n-1} \times u' \quad \text{نستعمل القاعدة التالية :} \quad f(x) = (3x+4)^3 \quad (14)$$

$$f'(x) = ((3x+4)^3)' = 3 \times (3x+4)^{3-1} \times (3x+4)' = 3 \times 3 \times (3x+4)^2 = 9(3x+4)^2$$

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \quad \text{نستعمل القاعدة التالية :}$$

$$f'(x) = (\sqrt{x^2 + 1})' = \frac{(x^2 + 1)'}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

تمرين 3: حدد الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

$$f(x) = 2x^3 \quad (3) \quad f(x) = 7x + 15 \quad (2) \quad f(x) = 11 \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 - 4x - 6 \quad (5) \quad f(x) = 4x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x + 1 \quad (4)$$

$$f(x) = \cos 2x + 3\sin 3x \quad (8) \quad f(x) = 4\sqrt{x} - 1 \quad (7) \quad f(x) = \frac{3}{x} \quad (6)$$

$$f(x) = \frac{1}{5x+7} \quad (10) \quad f(x) = (3x^2 + 2)(7x + 1) \quad (9)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sin x} \quad (13) \quad f(x) = \frac{7x}{x^3 + 1} \quad (12) \quad f(x) = \sqrt{x^2 + 8x} \quad (11)$$

$$f(x) = (2x - 1)^7 \quad (15) \quad f(x) = \frac{4x - 3}{2x - 1} \quad (14)$$

$$f'(x) = (7x + 15)' = 7 \quad (2) \quad f'(x) = (11)' = 0 \quad (1) \quad \text{أجوبة:}$$

$$f'(x) = (2x^3)' = 2 \times 3x^{3-1} = 6x^2 \quad (3)$$

$$f'(x) = \left(4x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x + 1\right)' = 4 \times 4x^{4-1} - \frac{1}{3} \times 3x^{3-1} - 1 + 0 = 16x^3 - x^2 - 1 \quad (4)$$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 - 4x - 6\right)' = \frac{1}{5} \times 5x^{5-1} - \frac{1}{4} \times 4x^{4-1} - 4 + 0 = x^4 - x^3 - 4 \quad (5)$$

$$f'(x) = \left(\frac{3}{x}\right)' = \left(3 \times \frac{1}{x}\right)' = 3 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{3}{x^2} \quad (6)$$

• f تناقصية على مجال I يعني $\forall x \in I \quad f'(x) \leq 0$

• f ثابتة على مجال I يعني $\forall x \in I \quad f'(x) = 0$

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي: $f(x) = x^2 + 2x - 2$

(1) حدد D_f (2) أحسب نهايات f عند محددات D_f

(3) أدرس تغيرات f حدد جدول تغيرات f

الجواب: (1) الدالة f حدودية إذن $D_f = \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + 2x - 2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 2x - 2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = (x^2 + 2x - 2)' = 2x + 2$$

$$f'(x) = 0 \text{ يعني } 2x + 2 = 0 \text{ يعني } x = -1$$

ندرس إشارة : $f'(x)$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$2x+2$	$-$	0	$+$

إذا كانت: $x \in [-1; +\infty[$ فإن : $f'(x) \geq 0$ ومنه f تزايدية

إذا كانت: $x \in]-\infty; -1]$ فإن : $f'(x) \leq 0$ ومنه f تناقصية

(4) نلخص النتائج في جدول يسمى جدول التغيرات :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-3	$+\infty$

2. مطايف دالة قابلة للاشتقاق

خاصية 1: لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I

و a عنصرا من I

إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق في النقطة a وتقبل مطرا فا

في النقطة a فإن $f'(a) = 0$

خاصية 2: لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I و a

عنصرا من I

إذا كانت f' تنعدم في النقطة a تتغير إشارتها فان $f(a)$ مطرا فا

للدالة f

مثال: حدد مطايف الدالة f المعرفة كالتالي: $f(x) = x^2 - 6x + 1$

$$\text{الجواب : } D_f = \mathbb{R} \text{ و } f'(x) = (x^2 - 6x + 1)' = 2x - 6$$

$$f'(x) = 0 \text{ يعني } 2x - 6 = 0 \text{ يعني } x = 3$$

ندرس إشارة : $f'(x)$ ونحدد جدول التغيرات

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-8	$+\infty$

f' تنعدم في 3 و تتغير إشارتها إذن $f(3) = -8$ مطرا ف للدالة f

وبالضبط قيمة دنيا للدالة f

تمرين 4: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x) = 2x^2 + x + 1$

$$\text{أو } f(x) = -x^2 + x \text{ أو } f(x) = -x^2 + 2x + 3$$

(1) حدد D_f (2) أحسب نهايات f عند محددات D_f

(3) أحسب مشتقة الدالة f و أدرس إشارتها (4) حدد جدول تغيرات f

(5) حدد معادلة لمماس منحى الدالة f في النقطة الذي أفصولها $x_0 = 1$

(6) حدد نقط تقاطع (C_f) مع محوري المعلم

(7) حدد مطايف الدالة f ان وجدت

(8) أرسم (C_f) في معلم متعامد ممنظم

$$\text{الجواب : } f(x) = 2x^2 + x + 1$$

(1) الدالة f حدودية إذن $D_f = \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^2 + x + 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 + x + 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 = +\infty$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = (2x^2 + x + 1)' = 4x + 1$$

$$f'(x) = 0 \text{ يعني } 4x + 1 = 0 \text{ يعني } x = -\frac{1}{4}$$

ندرس إشارة : $f'(x)$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$
$4x+1$	$-$	0	$+$

(4) جدول التغيرات :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$\frac{7}{8}$	$+\infty$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (5)$$

$$y = 5x - 21 \Leftrightarrow y = 4 + 5(x - 5) \Leftrightarrow y = f(1) + f'(1)(x - 1)$$

$$\text{لأن : } f(1) = 4 \text{ و } f'(1) = 5$$

(6) (أ) نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأفاصيل

نحل فقط المعادلة : $f(x) = 0$ يعني $2x^2 + x + 1 = 0$

نحل المعادلة باستعمال المميز

$$a = 2 \text{ و } b = 1 \text{ و } c = 1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times 1 \times 2 = -7 < 0$$

ومنه هذه المعادلة ليس لها حل: وبالتالي التمثيل المبياني

لا يقطع محور الأفاصيل

(ب) نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأرتايب

نحسب فقط : $f(0)$

$$f(0) = 1 \text{ ومنه نقطة التقاطع هي : } A(0; 1)$$

(7) الدالة تقبل قيمة دنيا هي : $\frac{7}{8}$

(8) رسم: C_f

2-	-1	-1/4	0	1	2
7	2	7/8	1	4	11

ومنه g قابلة للاشتقاق على اليمين عند $x_0 = 0$ و $-1 = f'_d(0)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x(x-1) - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -x + 1 = 1$$

ومنه g قابلة للاشتقاق على اليسار عند $x_0 = 0$ و $-1 = g'_g(0)$

g قابلة للاشتقاق على اليمين وعلى اليسار عند $x_0 = 0$

ولكن : $g'_d(0) \neq g'_g(0)$

ومنه : g غير قابلة للاشتقاق عند $x_0 = 0$

3. حل معادلة تفاضلية

تعريف: ليكن ω عددا حقيقيا غير منعدم .

. المعادلة $y'' + \omega^2 y = 0$ ذات المجهول الدالة y حيث y'' مشتقتها الثانية تسمى معادلة تفاضلية.

. كل دالة f قابلة للاشتقاق مرتين على $\mathbb{R}$

وتحقق المتساوية : $f''(x) + \omega^2 f(x) = 0$ لكل x من $\mathbb{R}$

تسمى حلا للمعادلة التفاضلية $y'' + \omega^2 y = 0$.

خاصية: ليكن ω عددا حقيقيا غير منعدم .

الحل العام للمعادلة التفاضلية $y'' + \omega^2 y = 0$ هو مجموعة

الدوال y المعرفة كما يلي : $y: x \rightarrow \alpha \cos \omega x + \beta \sin \omega x$

حيث $\alpha \in \mathbb{R}$ و $\beta \in \mathbb{R}$

ملحوظة: حل المعادلة التفاضلية : $y'' + \omega^2 y = 0$

يعني تحديد الحل العام للمعادلة.

مثال: حل المعادلة التفاضلية التالية: $y'' + 16y = 0$

الجواب $y'' + 4^2 y = 0 \Leftrightarrow y'' + 16y = 0$

ومنه الحل العام للمعادلة التفاضلية $y'' + 16y = 0$

هو مجموعة الدوال y المعرفة كما يلي : $y: x \rightarrow \alpha \cos 4x + \beta \sin 4x$

حيث $\alpha \in \mathbb{R}$ و $\beta \in \mathbb{R}$

تمرين 6: حل المعادلات التفاضلية التالية: (1) $y'' + 4y = 0$

(2) $y'' + 8y = 0$ (3) $y'' + y = 0$ (4) $9y'' + 16y = 0$

الجواب (1) $y'' + 2^2 y = 0 \Leftrightarrow y'' + 4y = 0$

ومنه الحل العام للمعادلة التفاضلية $y'' + 4y = 0$

هو مجموعة الدوال y المعرفة كما يلي : $y: x \rightarrow \alpha \cos 2x + \beta \sin 2x$

حيث $\alpha \in \mathbb{R}$ و $\beta \in \mathbb{R}$

(2) $y'' + (2\sqrt{2})^2 y = 0 \Leftrightarrow y'' + 8y = 0$

ومنه الحل العام للمعادلة التفاضلية $y'' + 8y = 0$

هو مجموعة الدوال y المعرفة كما يلي : $y: x \rightarrow \alpha \cos 2\sqrt{2}x + \beta \sin 2\sqrt{2}x$

حيث $\alpha \in \mathbb{R}$ و $\beta \in \mathbb{R}$

(3) $y'' + y = 0 \Leftrightarrow y'' + 1^2 y = 0$

ومنه الحل العام للمعادلة التفاضلية $y'' + y = 0$

هو مجموعة الدوال y المعرفة كما يلي : $y: x \rightarrow \alpha \cos x + \beta \sin x$

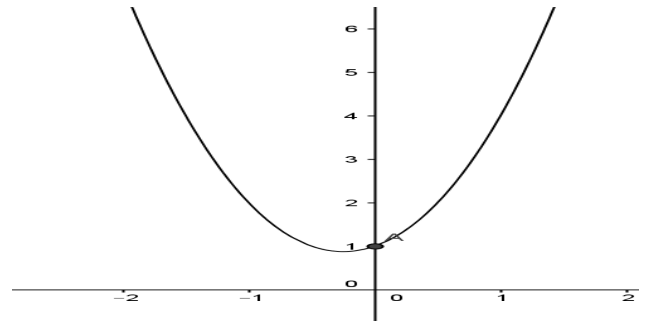
حيث $\alpha \in \mathbb{R}$ و $\beta \in \mathbb{R}$

(4) $y'' + \left(\frac{4}{3}\right)^2 y = 0 \Leftrightarrow y'' + \frac{16}{9}y = 0 \Leftrightarrow 9y'' + 16y = 0$

ومنه الحل العام للمعادلة التفاضلية $y'' + 8y = 0$

هو مجموعة الدوال y المعرفة كما يلي : $y: x \rightarrow \alpha \cos \frac{4}{3}x + \beta \sin \frac{4}{3}x$

حيث $\alpha \in \mathbb{R}$ و $\beta \in \mathbb{R}$



ملاحظة : بالنسبة ل $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ وتحديد نقط التقاطع

مع محور الأفصيل نحل المعادلة : $f(x) = 0$ يعني $-x^2 + 2x + 3 = 0$

نحل المعادلة باستعمال المميز

$a = -1$ و $b = 2$ و $c = 3$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 16 = (4)^2 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-2 - \sqrt{16}}{-2} = 3 \quad \text{و} \quad x_1 = \frac{-2 + \sqrt{16}}{-2} = -1$$

ومنه نقط التقاطع هما: $A(-1; 0)$ أو $B(3; 0)$

تمرين 5: نعتبر الدالتين f و g المعرفتين كالتالي :

$$g(x) = |x|(x-1) \quad \text{و} \quad \begin{cases} f(x) = x^2 + 2x; x \leq 1 \\ f(x) = -\frac{2}{x} + 5; x > 1 \end{cases}$$

(1) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين وعلى اليسار عند $x_0 = 1$

(2) هل الدالة f قابلة للاشتقاق ؟

(3) أدرس قابلية اشتقاق الدالة g عند $x_0 = 0$

$$\text{الجواب :} \quad \begin{cases} f(x) = x^2 + 2x; x \leq 1 \\ f(x) = -\frac{2}{x} + 5; x > 1 \end{cases} \quad \text{و} \quad f(1) = 1^2 + 2 \times 1 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-\frac{4}{x} + 5 - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-\frac{4}{x} + 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-4 + 2x}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-4 + 2x}{x} \times \frac{1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-4 + 2x}{x} \times \frac{1}{x-1} = -\infty$$

ومنه f غير قابلة للاشتقاق على اليمين عند $x_0 = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م مثلاً بالتعميل ثم بالاختزال:

نلاحظ أن : 1 جذر للحدودية $x^2 + 2x - 3$

ان : هي تقبل القسمة على : $x - 1$

وباستعمال تقنية القسمة الاقليدية نجد أن : $x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x+3)(x-1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} x + 3 = 4$$

ومنه f قابلة للاشتقاق على اليسار عند $x_0 = 1$ و $4 = f'_g(1)$

(2) f غير قابلة للاشتقاق على اليمين

ومنه : f غير قابلة للاشتقاق عند $x_0 = 1$

$$\begin{cases} g(x) = x(x-1); x \geq 0 \\ g(0) = 0 \quad \text{و} \quad g(x) = |x|(x-1) \\ g(x) = -x(x-1); x \leq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x-1) - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x - 1 = -1$$

جدول للدوال المشتقة لدوال اعتيادية و العمليات حول الدوال

الدالة	f' الدالة المشتقة
$f(x) = \tan x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
$f(x) = u + v$	$f'(x) = u' + v'$
$f(x) = u - v$	$f'(x) = u' - v'$
$f(x) = k.u$	$f'(x) = k.u'$
$f(x) = u \times v$	$f'(x) = u' \times v + u \times v'$
$f(x) = u^n$	$f'(x) = n u^{n-1} \times u'$
$f(x) = \frac{1}{u}$	$f'(x) = -\frac{u'}{u^2}$
$f(x) = \frac{u}{v}$	$f'(x) = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$
$f(x) = \sqrt{u}$	$f'(x) = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

لدالة	f' الدالة المشتقة
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = ax$	$f'(x) = a$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = n x^{n-1} \quad n \in \mathbb{Z}^*$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos(ax + b)$	$f'(x) = -a \sin(ax + b)$
$f(x) = \sin(ax + b)$	$f'(x) = a \cos(ax + b)$
$f(x) = \tan x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$