

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

الاشتقاق و تطبيقاته

القدرات المنتظرة	الدورة الثانية
<ul style="list-style-type: none"> تقريب دالة بجوار نقطة بدالة تألفة التعرف على أن العدد المشتق لدالة في x_0 هو المعامل الموجي لمسار منحنيها في النقطة التي أصوتها x_0 	1 رياضيات الدرس 1 الدورة الثانية 12 ساعة
<ul style="list-style-type: none"> التعرف على المنشقة الأولى للدوال المرجعية التمكن من تقييم حساب مشقة دالة تحديد معادلة المسار المنحني دالة في نقطة و اتساعه تحديد رتبة دالة انطلاقا من دراسة إشارة مشتقها تحديد إشارة دالة انطلاقا من جدول تغيرها أو من تغيلها المباني حل مسائل تطبيقية حول القيم الذئبة والقيم المقصوبة تطبيق الاشتتقاق في حساب بعض النهايات 	1 تجريبية الدرس 3 الدورة الثانية 10 ساعات

1- الاشتتقاق في نقطة

أ/ نشاط

بينت تجربة الفيزياء هند السقوط الحر لجسم بدأ سرعة بدئية أي $v_0 = 0$ في اللحظة $t = 0$ تكون حركته متغيرة بانتظام و محددة بالدالة الزمنية $d = f(t) = 5t^2$ حيث t هي المدة بالثانية و $d = f(t)$ المسافة بالمتر

1- بين أن السرعة المتوسطة بين اللحظتين t و $t+h$ حيث $t > 0$ و $h > 0$ هي $10t+5h$

2- نضع $t = 0,5$

أ/ أملئ الجدول التالي

0,01	0,001	0,0001	-0,0001	-0,001	-0,01	h
						$t+h$
						السرعة المتوسطة بين t و $t+h$

ب/ باستعمال الجدول تضمن نهاية السرعة المتوسطة عندما يؤول h إلى 0

ج/ أحسب $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,5+h) - f(0,5)}{h}$ ثم فارنها مع نتيجة ب

العدد $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,5+h) - f(0,5)}{h}$ يسمى السرعة اللحظية للجسم عند اللحظة $t = 0,5$

و يسمى أيضا العدد المشتق للدالة f في النقطة $t_0 = 0,5$

نكتب في هذه الحالة $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,5+h) - f(0,5)}{h} = f'(0,5)$

ب- تعریف

لتكن f دالة عدديّة معرفة في مجال مفتوح I و x_0 عنصرا من I

نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق في x_0 اذا وجد عدد حقيقي I حيث I ونرمز لها.

العدد I يسمى العدد المشتق لـ f في x_0 ونرمز له بـ $f'(x_0)$.

نكتب $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ ملاحظة:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

مثال: نعتبر $f(x) = x^2 + 2x$

بين أن f قابلة للاشتغال في 1 وحدد العدد المشتق في 1

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+3)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} x + 3 = 4$$

إذن f قابلة للاشتغال في 1 و $f'(1) = 4$

ج) الدالة التألفية المماسة لدالة

لتكن f قابلة للاشتغال في x_0

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0, \quad \varepsilon(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \quad \text{نضع} \quad f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{لدينا}$$

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \Leftrightarrow f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x) \quad / \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$$

أي أنه بجوار x_0 لدينا $f(x) \approx f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

الدالة $f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ تسمى الدالة التألفية المماسة لدالة f في النقطة x_0

تعريف

لتكن f دالة عدديّة معرفة في مجال مفتوح مركّزه x_0

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتغال في x_0 فإن الدالة التألفية المماسة لدالة f في النقطة x_0

هي الدالة $g : x \rightarrow f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

تمرين نعتبر $f(x) = \sqrt{x}$

(1) حدد الدالة التألفية المماسة لدالة f في النقطة 1

(2) استنتج قيمة مقرية لكل من $\sqrt{1,001}$ و $\sqrt{0,99}$

الجواب

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2} \quad \text{لدينا} / 1$$

ومنه الدالة التألفية المماسة لدالة f في النقطة 1 هي الدالة

$$g : x \rightarrow \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \quad \text{أي}$$

$$\sqrt{0,99} = f(0,99) \approx g(0,99) = 0,5 \times 0,99 + 0,5 = 0,995 \quad \text{لدينا} 1 \approx 0,99 \quad \text{ومنه}$$

$$\sqrt{1,001} = f(1,001) \approx g(1,001) = 0,5 \times 1,001 + 0,5 = 1,0005 \quad \text{لدينا} 1 \approx 1,001 \quad \text{ومنه}$$

2 - الاشتغال على اليمين - الاشتغال على اليسار

أ- تعريف

* لتكن f دالة معرفة على مجال من شكل $[x_0; x_0 + \alpha]$ حيث $\alpha > 0$

نقول إن f قابلة للاشتغال على اليمين في x_0 إذا كانت للدالة f نهاية $f'_d(x_0)$ على اليمين في x_0 ونرمز لها بـ $f'_d(x_0)$.

العدد $f'_d(x_0)$ يسمى العدد المشتق لـ f على اليمين في x_0 نكتب $f'_d(x_0)$

* لتكن f دالة معرفة على مجال من شكل $[x_0 - \alpha; x_0]$ حيث $\alpha > 0$

نقول إن f قابلة للاشتتقاق على اليسار في x_0 إذا كانت للدالة $x \rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ نهاية/على اليسار في x_0 نرمز لها بـ $f'_g(x_0)$.

العدد $f'_g(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ على اليسار في x_0 نكتب العدد f'_g يسمى العدد المشتق لـ f على اليسار في x_0 .

ملاحظة

$$f'_g(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{و} \quad f'_d(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

ب - خاصية

تكون f قابلة للاشتتقاق في x_0 إذا وفقط إذا كانت f قابلة للاشتتقاق على اليمين وعلى اليسار في x_0 والعدد المشتق على اليمين يساوي العدد المشتق على اليسار.

تمرين **أدرس قابلية اشتتقاق f في 0**

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x + 1 = 1$$

اذن f قابلة للاشتتقاق على يمين 0 و 1

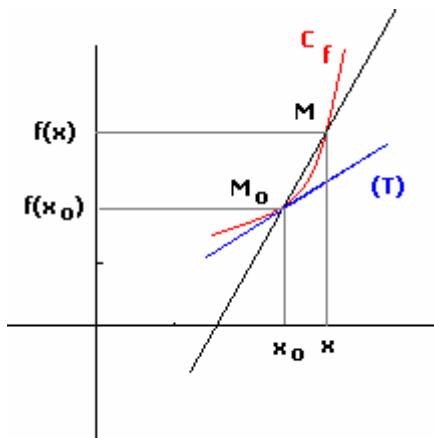
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x - 1 = -1$$

اذن f قابلة للاشتتقاق على يسار 0 و 1

لدينا $f'_d(0) \neq f'_g(0)$ ومنه f قابلة للاشتتقاق في 0

4- التأويل الهندسي - معادلة المماس لمنحنى دالة

أ- المماس



المعامل الموجه للمستقيم MM_0 هو $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

نلاحظ عندما تقترب M من M_0 (أي x تؤول إلى x_0) فان $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ تؤول إلى $f'(x_0)$

و بالتالي المستقيم MM_0 يدور حول M_0 إلى أن ينطبق مع المستقيم (T) ذا المعامل الموجه $f'(x_0)$.

المستقيم (T) مماس لمنحنى C_f
معادلة (T) هي $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

خاصية

لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح مركزه x_0 و C_f منحناها قابلية اشتتقاق f في x_0 تؤول هندسيا بوجود مماس L C_f عند النقطة ذات الأصول x_0

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

تمرين: $f(x) = x^3$ تعتبر 3

أدرس قابلية الاستدقة f في 2 وحدد معادلة المماس للمنحنى عند النقطة ذات الأفصول 2

الجواب

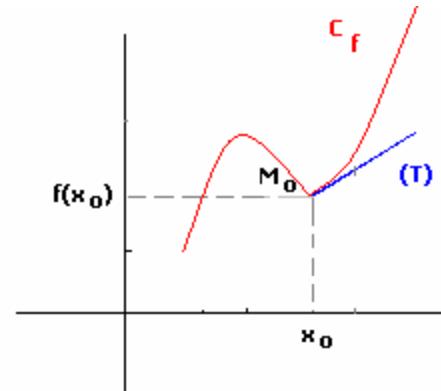
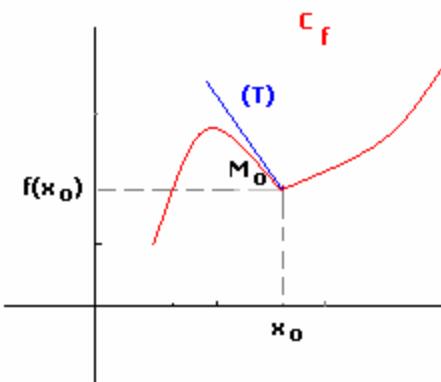
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2^3}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + 2x + 4 = 12$$

اذن f قابلة للاستدقة في 2 و $f'(2) = 12$

ومنه معادلة المماس هي $y = f'(2)(x - 2) + f(2)$ أي $y = 12(x - 2) + 8$

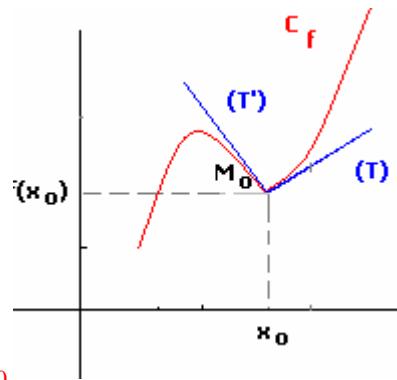
$$y = 12x - 16$$

ب- نصف المماس



$$\begin{cases} (T) : y = f_g'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ x \leq x_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (T) : y = f_d'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ x \geq x_0 \end{cases}$$



نقطة مزدوجة M_0

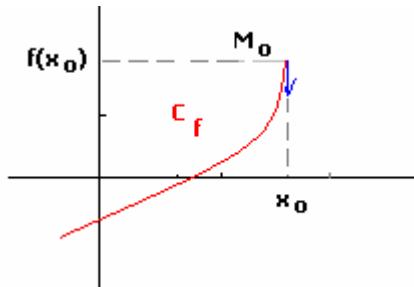
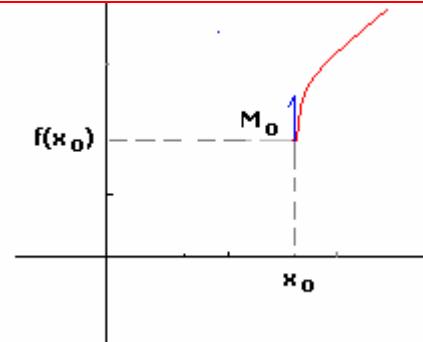
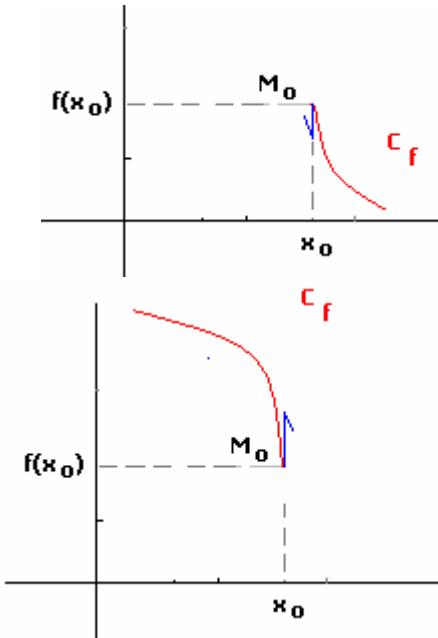
$$\begin{cases} (T) : y = f_d'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) & x \geq x_0 \\ (T') : y = f_g'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) & x \leq x_0 \end{cases}$$

خاصية

إذا كانت f قابلة للاستدقة على اليمين في x_0 (أو على اليسار في x_0) فان C_f يقبل

نصف مماس عند النقطة ذات الأفصول x_0 معامله الموجه $(f_g'(x_0)$ أو $f_d'(x_0)$)

إذا كانت نهاية $f(x) - f(x_0)$ في $x \rightarrow x_0 \pm \infty$ هي على اليمين في x_0 أو على اليسار في x_0 (فإن C_f يقبل مماس عمودي عند النقطة ذات الافصول x_0 (نصف مماس عمودي عند النقطة ذات الافصول x_0))



تمرين نعتبر $g(x) = \sqrt{x}$ و $f(x) = |x^2 - 1|$

أدرس قابلية اشتقاق f على يمين ويسار 1 و أول النتائج هندسيا

أدرس قابلية اشتقاق g على يمين 0 و أول النتائج هندسيا

الجواب

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} x + 1 = 2 *$$

ومنه f قابلة اشتقاق على يمين 1 و $f'_d(1) = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 - x^2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} -x - 1 = -2$$

ومنه f قابلة اشتقاق على يسار 1 و $f'_g(1) = -2$

نلاحظ $f'_d(1) \neq f'_g(1)$ اذن f غير قابلة للاشتقاق في 1

$y = 2(x - 1)$ يقبل نصف مماس على يمين 1 معادلته (C_f)

$y = -2(x - 1)$ يقبل نصف مماس على يسار 1 معادلته (C_g)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty *$$

ومنه f غير قابلة للاشتقاق على يمين 0 و (C_g) يقبل نصف مماس عمودي على يمين 0

أ- تعريف

تعريف 1

نقول إن f قابلة للاشتتقاق على المجال المفتوح I إذا كانت f قابلة للاشتتقاق في كل نقطة من I .

تعريف 2

نقول إن f قابلة للاشتتقاق على المجال $[a; b]$ إذا كانت f قابلة للاشتتقاق على $[a; b]$ وعلى a وعلى يسار b .

ملاحظة : بالمثل نعرف الاشتتقاق على $[a; b]$ وعلى $[a; b]$

تعريف 3

لتكن قابلة للاشتتقاق على المجال I الدالة التي تربط كل عنصر x من I بالعدد $(x)' f$ تسمى الدالة المشتقة نرمز لها f' .

مثال : نعتبر $f(x) = x^2$

ندرس قابلية اشتتقاق f و نحدد الدالة المشتقة
ليكن $x_0 \in \mathbb{R}$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} x + x_0 = 2x_0$$

اذن f قابلة للاشتتقاق في \mathbb{R} و $f'(x) = 2x$

ملاحظة :

يكون للمنحنى الممثل الدالة f قابلة للاشتتقاق على مجال مفتوح I مماس عند كل نقطة من هذا المنحنى

ب- المشتقة الثانية - المشتقات المتتالية

لتكن f قابلة للاشتتقاق مجال I

إذا الدالة f' قابلة للاشتتقاق المجال I فإن دالتها المشتقة تسمى الدالة المشتقه الثانية و نرمز لها بالرمز f''

إذا كانت f'' قابلة للاشتتقاق المجال I فإن دالتها المشتقة تسمى الدالة المشتقه الثالثة أو المشتقه من الرتبه 3 و نرمز لها بالرمز f''' أو $f^{(3)}$ أو هكذا

نرمز للدالة المشتقه من الرتبه n حيث $n \in \mathbb{N}^*$ بالرمز $f^{(n)}$

مثال : نعتبر $f(x) = x^2$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = 2 \quad \text{وحيث} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 2x$$

6- عمليات على الدوال المشتقة

*- لتكن f و g دالتين قابلتين للاشتتقاق على مجال I و $\lambda \in \mathbb{R}$ و $\{1\} -$

$f + g$ و $f \times g$ و f^n و λf دوال قابلة للاشتتقاق على المجال I

و اذا كانت g لا تتعذر على I فان $\frac{f}{g}$ و $\frac{1}{g}$ قابلتان للاشتتقاق على المجال I

$$\forall x \in I \quad (f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$(f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$(\lambda f)' = \lambda f'(x)$$

$$\forall x \in I \quad \left(\frac{f}{g} \right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \quad \left(\frac{1}{g} \right)'(x) = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$$

على I

-^{*} لتكن f دالة قابلة للاشتراق على مجال I و $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

$$\forall x \in I \quad \left(f^n \right)'(x) = n(f(x))^{n-1} \times f'(x)$$

$$(f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\begin{aligned} (f \times g)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x) \end{aligned}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = f(x) \text{ و } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = g'(x) \text{ و } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

$$\text{فإن } (f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

7- الدوال المشتقة لبعض الدوال الاعتيادية

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = k \quad \text{* الدالة الثابتة:}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 0 \quad \text{إذن } f \text{ قابلة للاشتراق على } \mathbb{R} \text{ و } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$$

$f : x \rightarrow x$ *

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 1 \quad \text{إذن } f \text{ قابلة للاشتراق على } \mathbb{R} \text{ و } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 1$$

$f : x \rightarrow ax + b$ *

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = a \quad \text{إذن } f \text{ قابلة للاشتراق على } \mathbb{R} \text{ و } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a$$

$n \in \mathbb{N}^* \quad f : x \rightarrow x^n$ *

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = nx^{n-1} \quad (x)' = nx^{n-1} \quad \text{و } \mathbb{R} \text{ قابلة للاشتراق على } f$$

$f : x \rightarrow \frac{1}{x}$ *

$$\mathbb{R}^* \quad \text{إذن } f \text{ قابلة للاشتراق على } \mathbb{R}^* \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-1}{x \times x_0} = -\frac{1}{x_0^2}$$

$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ و

$x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ لتكن $f : x \rightarrow \sqrt{x}$ *

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = -\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{و } \mathbb{R}_+^* \text{ قابلة للاشتراق على } f$$

f غير قابلة للاشتراق في 0

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f'(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0 + h) - \sin(x_0)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} (2 \cos(x_0 + h)) \times 2 \times \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \cos x_0
 \end{aligned}$$

إذن

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin'(x) = \cos x \quad \text{و} \quad x \rightarrow \sin x$$

* الدالة

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos'(x) = -\sin x \quad \text{و} \quad x \rightarrow \cos x$$

* الدالة

$$\forall x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \tan'(x) = \frac{(\sin x)'(\cos x) - (\sin x)(\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{(\cos x)^2} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \tan'(x) = 1 + \tan^2 x \quad \text{إذن}$$

$$\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \quad x \rightarrow \tan x \quad \text{قابلة للاشتباك في كل نقطة من}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \tan'(x) = 1 + \tan^2 x \quad \text{و}$$

نتائج

* الدالة الحدودية قابلة للاشتباك في \mathbb{R}

* الدالة الجذرية قابلة للاشتباك في كل نقطة من حيث تعريفها

أمثلة

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{2x^3 - 3x}{x^2 + x - 2} \quad \text{نعتبر} \\
 D_f &= \mathbb{R} - \{1; -2\}
 \end{aligned}$$

f الدالة الجذرية ومنه f قابلة للاشتباك في كل نقطة من $\mathbb{R} - \{1; -2\}$

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{1; -2\} \quad f'(x) = \frac{(3x^2 - 3)(x^2 + x - 2) - (2x + 1)(2x^3 - 3x)}{(x^2 + x - 2)^2} = \dots \quad \text{و}$$

\sqrt{f} مشتقة - $f'(ax + b)$ مشتقة - 8

مبرهنة

ليكن المجال J صورة المجال I بالدالة التألفية $x \rightarrow ax + b$

إذا كانت f قابلة للاشتباك على J فان $g : x \rightarrow f(ax + b)$ قابلة للاشتباك على I و

$$\forall x \in I \quad g'(x) = af'(ax + b)$$

$$f(x) = \sin\left(5x - \frac{\pi}{3}\right) \quad \text{مثال: نعتبر}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 5 \cos\left(5x - \frac{\pi}{3}\right) \quad f \quad \text{قابلة للاشتباك على} \quad \mathbb{R} \quad \text{و}$$

خاصية

لتكن f دالة موجبة قطعاً وقابلة للاشتباك على مجال I

$$\forall x \in I \quad (\sqrt{f})'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

مثال: نعتبر $f(x) = \sqrt{-x^2 + x}$
 $D_f = [0;1]$

دالة موجبة قطعاً وقابلة للاشتباك على مجال $[0;1]$ $x \rightarrow -x^2 + x$

$$\forall x \in [0;1] \quad f'(x) = \frac{-2x+1}{2\sqrt{-x^2 + x}}$$

إذن f قابلة للاشتباك على $[0;1]$ و

جدول مشتقات بعض الدوال

D_f'	$f'(x)$	$f(x)$
\mathbb{R}	0	a
\mathbb{R}	1	x
\mathbb{R}^*	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$
\mathbb{R}	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ x^n
\mathbb{R}^*	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{Z}^{*-}$ x^n
\mathbb{R}_+^*	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	\sqrt{x}
\mathbb{R}	$-\sin x$	$\cos x$
\mathbb{R}	$\cos x$	$\sin x$
$\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$	$1 + \tan^2 x$	$\tan x$
\mathbb{R}	$-a \sin(ax + b)$	$\cos(ax + b)$
\mathbb{R}	$a \cos(ax + b)$	$\sin(ax + b)$

تمارين

-1 أدرس اشتباك f وحدد الدالة المشتقة في الحالات التالية:

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{x^2 - x} * \quad f(x) = \frac{3x - 1}{2x - 2} * \quad f(x) = \frac{5}{x^2} * \quad f(x) = 5x^4 + 3x^2 + 4 *$$

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x - \sin x} * \quad f(x) = (\cos x)^5 * \quad f(x) = (x^2 + x)^5 *$$

$$f(x) = x^2 + x|x| * \quad \begin{cases} f(x) = x^2 + x & x \leq 0 \\ f(x) = x^3 - x^2 & x > 0 \end{cases} *$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1} \quad \text{نعتبر}$$

- أ- بين أن منحنى f يقبل مماسين موازيين لل المستقيم الذي معادلته $x = -3x$
 ب- أكتب معادلتي هذين المماسين.

9- تطبيقات الدالة المشتقة

a- قابلية الاشتباك والمطraf

لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح I و $x_0 \in I$
نعتبر f قابلة للاشتقاق في x_0 و تقبل مطراها في x_0
لنفترض أن f تقبل قيمة قصوى نسبية عند x_0

$\forall x \in J \quad f(x) \leq f(x_0)$ ضمن I حيث J مركبة x_0 و منه يوجد مجال مفتوح J مركبة x_0 ضمن I

$f'(x_0) = f_d'(x_0) = f_g'(x_0)$ ومنه f قابلة للاشتقاق في x_0

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

و حيث $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ و $\forall x \geq x_0 \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$ فان $\forall x \in J \quad f(x) \leq f(x_0)$

و منه $f'(x_0) = 0$ $f'(x_0) \leq 0$; $f'(x_0) \geq 0$ اذن $f_d'(x_0) \leq 0$; $f_g'(x_0) \geq 0$
(إذا كانت f تقبل قيمة دنيا نسبية عند x_0 تتبع نفس الخطوات للحصول على نفس النتائج)

مبرهنة

لتكن f دالة معرفة على مجال فتوح I و $x_0 \in I$

إذا كانت f قابلة للاشتقاق في النقطة x_0 و تقبل مطراها في النقطة x_0 فان $f'(x_0) = 0$

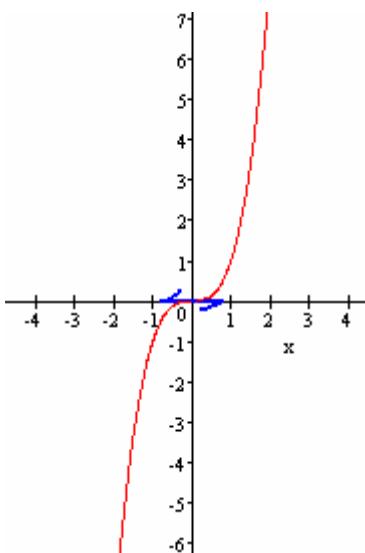
ملاحظة:

المبرهنة لا تقبل المبرهنة العكسية

$$x_0 = 0 \quad ; \quad f(x) = x^3$$

$f'(0) = 0$ و f قابلة للاشتقاق في $x_0 = 0$

و مع ذلك f لا تقبل مطراها عند 0



b- الاشتقاء ورتابة دالة

مبرهنة

لتكن f قابلة للاشتقاق على مجال I

تكون f تزايدية (قطعا) على I إذا وفقط إذا كانت الدالة المشتقة f' موجبة على I

$$\text{أي } f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I \quad \text{أي } 0 \leq f'(x) \quad \forall x \in I$$

تكون f تناقصية (قطعا) على I إذا وفقط إذا كانت الدالة المشتقة f' سالبة على I

$$\text{أي } f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in I \quad \text{أي } f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$$

تكون f ثابتة على I إذا كانت الدالة المشتقة f' منعدمة على I أي $f'(x) = 0 \quad \forall x \in I$

مثال

$$f(x) = x^3 - 6x + 1$$

نعتبر

أدرس تغيرات f و أعط جدول تغيرات f (في جدول التغيرات يجب تحديد النهايات)
حدد مطارات f ان وجدت

الجواب

$$D_f = \mathbb{R}$$

* مجموعة تعريف

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = (x^3)' - (6x)' + (1)' = 3x^2 - 6 = 3(x^2 - 2) \quad f(x) = x^3 - 6x + 1$$

اشارة $f'(x)$ هي إشارة $x^2 - 2$

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$x^2 - 2$	+	0	-	0

ومنه f' موجبة على كل $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ و سالبة على $[-\infty; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; +\infty]$ ومنه f تزايدية على كل $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ و تناقصية على $[-\infty; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; +\infty]$ جدول التغيرات

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0
f	$-\infty$	$10\sqrt{2} + 1$	$-4\sqrt{2} + 1$	$+\infty$

من خلا جدول التغيرات نستنتج أن f تقبل قيمة قصوى عند $\sqrt{2}$ و دنيا عند $-\sqrt{2}$ ملاحظة لتكن f قابلة للاشتاقاق في x_0

f تقبل مطراها في x_0 إذا و فقط إذا كانت f' تتعدم في x_0 و تغير إشارتها في مجال مفتوح يحتوى على x_0

10- المعادلة التفاضلية $y'' + \omega^2 y = 0$

تؤدي دراسة بعض الظواهر الفيزيائية و البيولوجية و الاقتصادية و غيرها إلى معادلات يكون فيها المجهول دالة وتحتوى على مشتقة أو مشتقات هذه الدالة.

هذا النوع من المعادلات يسمى المعادلات التفاضلية
تعريف

ليكن ω عدد حقيقيا غير منعدم

المعادلة $y'' + \omega^2 y = 0$ تسمى معادلة تفاضلية.

كل دالة f قابلة للاشتاقاق مرتين على \mathbb{R} و تحقق $f''(x) + \omega^2 f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ تسمى حل

للمعادلة $y'' + \omega^2 y = 0$

أمثلة $y'' + \frac{3}{2}y = 0$ و $y'' + \sqrt{2}y = 0$ و $y'' + 4y = 0$

خاصية

ليكن ω عدد حقيقيا غير منعدم

الحل العام للمعادلة $y'' + \omega^2 y = 0$ هو مجموعة الدوال y المعرفة كما يلي $y: x \rightarrow \alpha \cos \omega x + \beta \sin \omega x$ حيث $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$

ملاحظة

حل المعادلة $y'' + \omega^2 y = 0$ يرجع إلى تحديد الحل العام لهذه المعادلة

مثال

حل المعادلة $y'' + 4y = 0$

لدينا $y'' + 4y = 0$ ومنه $\omega^2 = 4$ يمكن أخذ $\omega = 2$ هذا لن يغير مجموعة الحلول الحل العام لهذه المعادلة هو مجموعة الدوال $y: x \rightarrow \alpha \cos 2x + \beta \sin 2x$ حيث $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$

معادلة تفاضلية خاصة

حل المعادلة $y'' = 0$

إذا كان $y'' = 0$ فإن y دالة ثابتة ومنه الحل العام لهذه المعادلة هو مجموعة الدوال

حيث $(a; b) \in \mathbb{R}^2$