

1 ع رياضيات الدرس 1 الدورة الثانية 12 ساعة	<b>القدرات المنتظرة</b> تقريب دالة بجوار نقطة بدالة تألفية؛ التعرف على أن العدد المشتق للدالة في $x_0$ هو المعامل الموجه لمماس منحناها في النقطة التي أفصوغها $x_0$ ؛ التعرف على المشتقة الأولى للدوال المرجعية التمكن من تقنيات حساب مشتقة دالة تحديد معادلة للمماس لمحنى دالة في نقطة وإنشاؤه؛ تحديد رتبة دالة انطلاقا من دراسة إشارة مشتقتها؛ تحديد إشارة دالة انطلاقا من جدول تغيراتها أو من تمثيلها للمباني؛ حل مسائل تطبيقية حول القيم الدنوية والقيم القصوى ؛ تطبيق الاشتقاق في حساب بعض النهايات
1 ع تجريبية الدرس 3 الدورة الثانية 10 ساعات	

### 1- الاشتقاق في نقطة / نشاط

بينت تجربة الفيزياء هند السقوط الحر لجسم بدن سرعة بدئية أي  $v_0 = 0$  في اللحظة  $t = 0$  تكون حركته متغيرة بانتظام و محددة بالدالة الزمنية  $d = f(t) = 5t^2$  حيث  $t$  هي المدة بالثانية و  $d = f(t)$  المسافة بالمتري

1- بين أن السرعة المتوسطة بين اللحظتين  $t$  و  $t+h$  حيث  $h \neq 0$  و  $t+h > 0$  هي  $10t+5h$   
2- نضع  $t = 0,5s$

أ/ أملئ الجدول التالي

0,01	0,001	0,0001	-0,0001	-0,001	-0,01	$h$
						$t+h$
						السرعة المتوسطة بين $t$ و $t+h$

ب/ باستعمال الجدول تضمن نهاية السرعة المتوسطة عندما يؤول  $h$  الى 0

ج/ أحسب  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,5+h) - f(0,5)}{h}$  ثم قارنها مع نتيجة ب

العدد  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,5+h) - f(0,5)}{h}$  يسمى السرعة اللحظية للجسم عند اللحظة  $t = 0,5s$

و يسمى أيضا العدد المشتق للدالة  $f$  عي النقطة  $t_0 = 0,5$

نكتب في هذه الحالة  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,5+h) - f(0,5)}{h} = f'(0,5)$

### ب- تعريف

لتكن  $f$  دالة عددية معرفة في مجال مفتوح  $I$  و  $x_0$  عنصرا من  $I$

نقول إن الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق في  $x_0$  اذا وجد عدد حقيقي  $l$  حيث  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = l$

ونرمز لها.

العدد  $l$  يسمى العدد المشتق لـ  $f$  في  $x_0$  ونرمز له بـ  $f'(x_0)$ .

نكتب  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$

ملاحظة:  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

**مثال:** نعتبر  $f(x) = x^2 + 2x$

بين أن  $f$  قابلة للاشتقاق في 1 و حدد العدد المشتق في 1

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+3)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} x + 3 = 4$$

إذن  $f$  قابلة للاشتقاق في 1 و  $f'(1) = 4$

### (ج) الدالة التآلفية المماسية لدالة

لتكن  $f$  قابلة للاشتقاق في  $x_0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0, \quad \varepsilon(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \quad \text{نضع} \quad f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{لدينا}$$

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \Leftrightarrow f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x) \quad / \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$$

أي أنه بجوار  $x_0$  لدينا  $f(x) \approx f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

الدالة  $f(x) \approx f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$  تسمى الدالة التآلفية المماسية لدالة  $f$  في النقطة  $x_0$

### تعريف

لتكن  $f$  دالة عددية معرفة في مجال مفتوح مركزه  $x_0$

إذا كانت الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق في  $x_0$  فان الدالة التآلفية المماسية لدالة  $f$  في النقطة  $x_0$

هي الدالة  $g : x \rightarrow f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

**تمرين** نعتبر  $f(x) = \sqrt{x}$

(1) حدد الدالة التآلفية المماسية لدالة  $f$  في النقطة 1

(2) استنتج قيمة مقربة لكل من  $\sqrt{0,99}$  و  $\sqrt{1,001}$

### الجواب

$$/1 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2} \quad \text{لدينا}$$

ومنه الدالة التآلفية المماسية لدالة  $f$  في النقطة 1 هي الدالة  $g : x \rightarrow \frac{1}{2}(x - 1) + 1$

$$\text{أي} \quad g : x \rightarrow \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{0,99} = f(0,99) \approx g(0,99) = 0,5 \times 0,99 + 0,5 = \dots \quad \text{ومنه} \quad 0,99 \approx 1 \quad \text{لدينا}$$

$$\sqrt{1,001} = f(1,001) \approx g(1,001) = 0,5 \times 1,001 + 0,5 = \dots \quad \text{ومنه} \quad 1,001 \approx 1 \quad \text{لدينا}$$

### 2 - الاشتقاق على اليمين - الاشتقاق على اليسار

#### أ- تعريف

\* لتكن  $f$  دالة معرفة على مجال من شكل  $[x_0; x_0 + \alpha]$  حيث  $\alpha > 0$

نقول إن  $f$  قابلة للاشتقاق على اليمين في  $x_0$  إذا كانت للدالة  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  نهاية  $l$  على

الييمين في  $x_0$  و نرمز لها بـ  $f'_d(x_0)$ .

$$f'_d(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{نكتب} \quad \text{العدد } l \text{ يسمى العدد المشتق لـ } f \text{ على اليمين في } x_0$$

\* لتكن  $f$  دالة معرفة على مجال من شكل  $[x_0 - \alpha; x_0]$  حيث  $\alpha > 0$

نقول إن  $f$  قابلة للاشتقاق على اليسار في  $x_0$  إذا كانت للدالة  $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$  نهاية أعلى اليسار في  $x_0$  نرسم لها ب  $f'_g(x_0)$ .

العدد  $l$  يسمى العدد المشتق ل  $f$  على اليسار في  $x_0$  نكتب  $f'_g(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

**ملاحظة**

$$f'_g(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \text{ و } f'_d(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

**ب - خاصية**

تكون  $f$  قابلة للاشتقاق في  $x_0$  إذا وفقط إذا كانت  $f$  قابلة للاشتقاق على اليمين وعلى اليسار في  $x_0$  والعدد المشتق على اليمين يساوي العدد المشتق على اليسار.

**تمرين** نعتبر  $f(x) = x^2 + |x|$  أدرس قابلية اشتقاق  $f$  في 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2+x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x+1=1$$

اذن  $f$  قابلة للاشتقاق على يمين 0 و  $f'_d(0) = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2-x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x-1=-1$$

اذن  $f$  قابلة للاشتقاق على يسار 0 و  $f'_g(0) = -1$

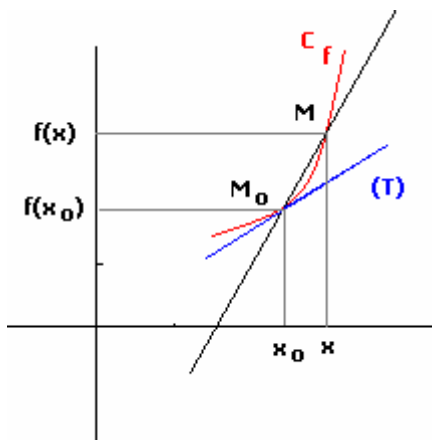
لدينا  $f'_d(0) \neq f'_g(0)$  ومنه  $f$  قابلة للاشتقاق في 0

#### **4- التأويل الهندسي - معادلة المماس لمنحنى دالة**

**أ- المماس**

لتكن  $f$  قابلة للاشتقاق في  $x_0$  و  $C_f$  منحنىها

نعتبر  $M_0(x_0; f(x_0))$  و  $M(x; f(x))$  نقطتين من  $C_f$



المعامل الموجه للمستقيم  $(MM_0)$  هو  $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

نلاحظ عندما تقترب  $M$  من  $M_0$  (أي  $x$  تتوّل إلى  $x_0$ ) فإن  $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$  تتوّل إلى  $f'(x_0)$

و بالتالي المستقيم  $(MM_0)$  يدور حول  $M_0$  إلى أن ينطبق مع المستقيم  $(T)$  ذا المعامل الموجه  $f'(x_0)$ .

المستقيم  $(T)$  مماس للمنحنى  $C_f$

معادلة  $(T)$  هي  $y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$

**خاصية**

لتكن  $f$  دالة معرفة على مجال مفتوح مركزه  $x_0$  و  $C_f$  منحنىها

قابلية اشتقاق  $f$  في  $x_0$  تتوّل هندسيا بوجود مماس ل  $C_f$  عند النقطة ذات الأفصول  $x_0$

معادلته  $y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$

**تمرين:** نعتبر  $f(x) = x^3$

أدرس قابلية اشتقاق  $f$  في 2 و حدد معادلة المماس للمنحنى عند النقطة ذات الأفصول 2

الجواب

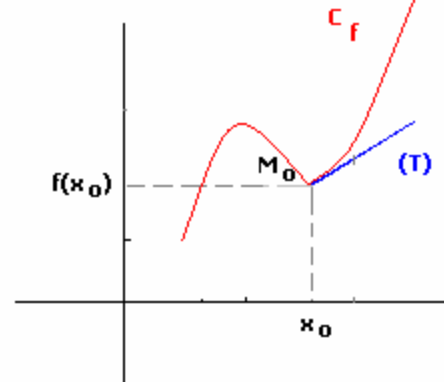
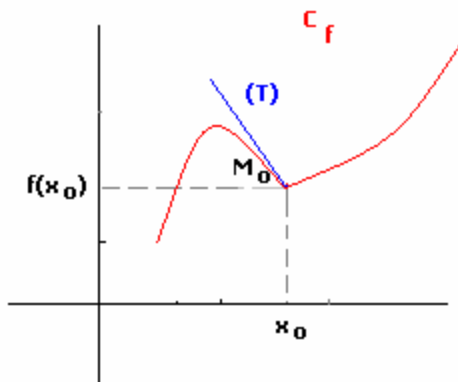
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2^3}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + 2x + 4 = 12$$

اذن  $f$  قابلة للاشتقاق في 2 و  $f'(2) = 12$

ومنه معادلة المماس هي  $y = f'(2)(x - 2) + f(2)$  أي  $y = 12(x - 2) + 8$

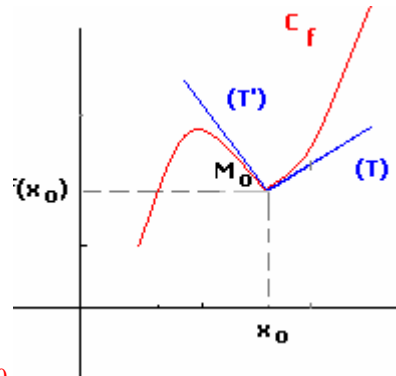
$$y = 12x - 16$$

### ب- نصف المماس



$$\begin{cases} (T): y = f'_g(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ x \leq x_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (T): y = f'_d(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ x \geq x_0 \end{cases}$$



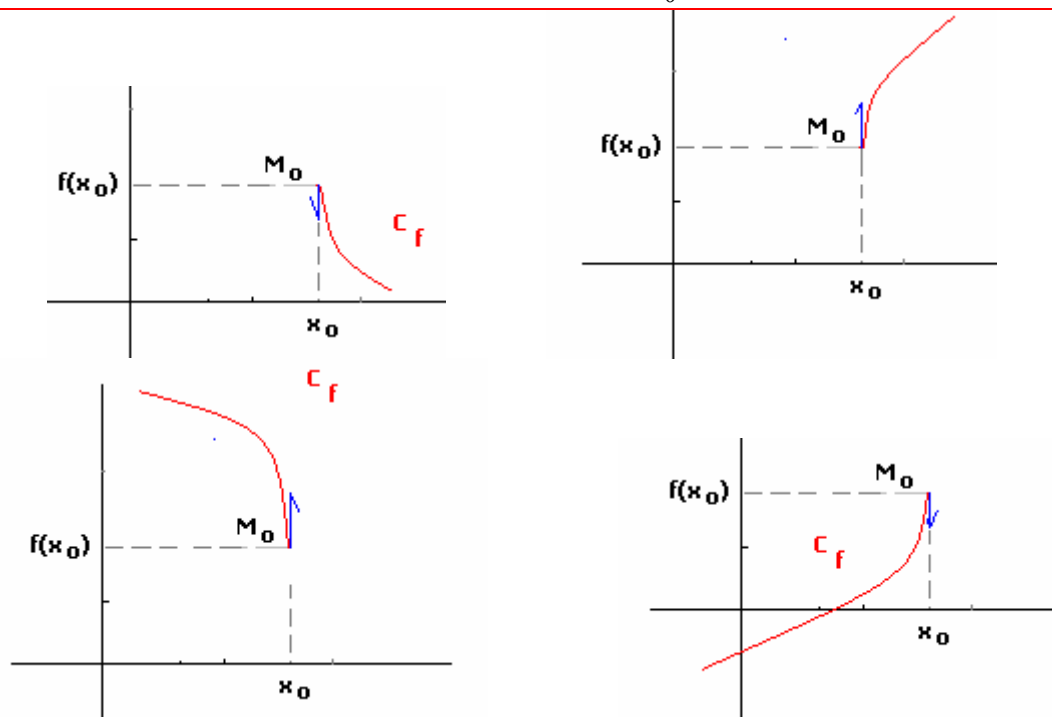
**نقطة مزواة**  $M_0$

$$\begin{cases} (T): y = f'_d(x_0)(x - x_0) + f(x_0) & x \geq x_0 \\ (T'): y = f'_g(x_0)(x - x_0) + f(x_0) & x \leq x_0 \end{cases}$$

### خاصة

إذا كانت  $f$  قابلة للاشتقاق على اليمين في  $x_0$  (أو على اليسار في  $x_0$ ) فإن  $C_f$  يقبل نصف مماس عند النقطة ذات الأفصول  $x_0$  معامل الموجه  $f'_d(x_0)$  (أو  $f'_g(x_0)$ )

إذا كانت نهاية  $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$  هي  $f' \pm \infty$  في  $x_0$  (على اليمين في  $x_0$  أو على اليسار في  $x_0$ ) فإن  $C_f$  يقبل مماس عمودي عند النقطة ذات الافصول  $x_0$  ( نصف مماس عمودي عند النقطة ذات الافصول  $x_0$  )



**تمرين** نعتبر  $f(x) = |x^2 - 1|$  و  $g(x) = \sqrt{x}$

أدرس قابلية اشتقاق  $f$  على يمين ويسار 1 و أول النتائج هندسيا  
أدرس قابلية اشتقاق  $g$  على يمين 0 و أول النتيجة هندسيا

الجواب

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x^2-1|}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} x+1 = 2 *$$

ومنه  $f$  قابلة اشتقاق على يمين 1 و  $f'_d(1) = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x^2-1|}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-x^2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} -x-1 = -2$$

ومنه  $f$  قابلة اشتقاق على يسار 1 و  $f'_g(1) = -2$

نلاحظ  $f'_d(1) \neq f'_g(1)$  إذن  $f$  غير قابلة للاشتقاق في 1

$(C_f)$  يقبل نصف مماس على يمين 1 معادلته  $y = 2(x-1)$ .

$(C_f)$  يقبل نصف مماس على يسار 1 معادلته  $y = -2(x-1)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty *$$

ومنه  $f$  غير قابلة للاشتقاق على يمين 0 و  $(C_g)$  يقبل نصف مماس عمودي على يمين 0

أ- تعاريف

تعريف 1

نقول إن  $f$  قابلة للاشتقاق على المجال المفتوح  $I$  إذا كانت  $f$  قابلة للاشتقاق في كل نقطة من  $I$ .

تعريف 2

نقول إن  $f$  قابلة للاشتقاق على المجال  $[a; b]$  إذا كانت  $f$  قابلة للاشتقاق على  $]a; b[$  وعلى يمين  $a$  وعلى يسار  $b$ .

ملاحظة : بالمثل نعرف الاشتقاق على  $]a; b[$  وعلى  $[a; b]$

تعريف 3

لتكن قابلة للاشتقاق على المجال  $I$   
الدالة التي تربط كل عنصر  $x$  من  $I$  بالعدد  $f'(x)$  تسمى الدالة المشتقة نرسم لها بـ  $f'$ .

مثال : نعتبر  $f(x) = x^2$

ندرس قابلية اشتقاق  $f$  ونحدد الدالة المشتقة

ليكن  $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} x + x_0 = 2x_0$$

ومنه قابلة للاشتقاق في  $x_0$  و  $f'(x_0) = 2x_0$

اذن  $f$  قابلة للاشتقاق في  $\mathbb{R}$  و  $f'(x) = 2x$   $\forall x \in \mathbb{R}$

ملاحظة:

يكون للمنحنى الممثل لدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح  $I$  مماس عند كل نقطة

من هذا المنحنى

ب- المشتقة الثانية – المشتقات المتتالية

لتكن  $f$  قابلة للاشتقاق مجال  $I$

إذا الدالة  $f'$  قابلة للاشتقاق المجال  $I$  فان دالتها المشتقة تسمى الدالة المشتقة الثانية

و نرسم لها بالرمز  $f''$

إذا كانت  $f''$  قابلة للاشتقاق المجال  $I$  فان دالتها المشتقة تسمى الدالة المشتقة الثالثة أو

المشتقة من الرتبة 3 و نرسم لها بالرمز  $f'''$  أو  $f^{(3)}$

و هكذا .....

نرسم للدالة المشتقة من الرتبة  $n$  حيث  $n \in \mathbb{N}^*$  بالرمز  $f^{(n)}$

مثال : نعتبر  $f(x) = x^2$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 2x \quad \text{حيث} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = 2 \quad \text{فان} \quad f''(x) = 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

6- عمليات على الدوال المشتقة

\*- لتكن  $f$  و  $g$  دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال  $I$  و  $\lambda \in \mathbb{R}$  و  $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

$f + g$  و  $f \times g$  و  $\lambda f$  و  $f^{(n)}$  دوال قابلة للاشتقاق على المجال  $I$

و اذا كانت  $g$  لا تنعدم على  $I$  فان  $\frac{f}{g}$  و  $\frac{1}{g}$  قابلتان للاشتقاق على المجال  $I$

$$\forall x \in I \quad (f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$(f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$(\lambda f)' = \lambda f'(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \quad \left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$$

على I

\*- لتكن  $f$  دالة قابلة للاشتقاق على مجال  $I$  و  $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

$$\forall x \in I \quad (f^n)'(x) = n(f(x))^{n-1} \times f'(x) \quad (\text{نبين ذلك بالترجع})$$

$$(f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad \text{نبرهن}$$

$$(f \times g)'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = f(x) \quad \text{و} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = g'(x) \quad \text{و} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

$$\text{فان} \quad (f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

### 7- الدوال المشتقة لبعض الدوال الاعتيادية

\* الدالة الثابتة:  $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = k$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 0 \quad \text{اذن} \quad f \text{ قابلة للاشتقاق على } \mathbb{R} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$$

\* الدالة  $f: x \rightarrow x$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 1 \quad \text{اذن} \quad f \text{ قابلة للاشتقاق على } \mathbb{R} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 1$$

\* الدالة  $f: x \rightarrow ax + b$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = a \quad \text{اذن} \quad f \text{ قابلة للاشتقاق على } \mathbb{R} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a$$

\* الدالة  $f: x \rightarrow x^n \quad n \in \mathbb{N}^*$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = nx^{n-1} \quad \text{اذن} \quad f \text{ قابلة للاشتقاق على } \mathbb{R} \quad (x^n)' = nx^{n-1}$$

\* الدالة  $f: x \rightarrow \frac{1}{x}$

$$\mathbb{R}^* \text{ اذن } f \text{ قابلة للاشتقاق على } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-1}{x \times x_0} = -\frac{1}{x_0^2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \text{و}$$

\* الدالة  $f: x \rightarrow \sqrt{x} \quad x_0 \in \mathbb{R}_+^*$  لتكن

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = -\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{اذن} \quad f \text{ قابلة للاشتقاق على } \mathbb{R}_+^*$$

$f$  غير قابلة للاشتقاق في 0

$$\begin{aligned} \text{* الدالة } f : x \rightarrow \sin x \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0 + h) - \sin(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( 2 \cos(x_0 + h) \right) \times 2 \times \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \cos x_0 \end{aligned}$$

إذن

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin'(x) = \cos x \quad \text{و} \quad x \rightarrow \sin x \text{ قابلة للاشتقاق على } \mathbb{R}$$

$$\text{* الدالة } f : x \rightarrow \cos x$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos'(x) = -\sin x \quad \text{و} \quad x \rightarrow \cos x \text{ قابلة للاشتقاق على } \mathbb{R}$$

$$\text{* الدالة } f : x \rightarrow \tan x$$

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} \\ \forall x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \tan' x &= \frac{(\sin x)'(\cos x) - (\sin x)(\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{(\cos x)^2} = \frac{1}{\cos^2 x} \\ \forall x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \tan' x &= 1 + \tan^2 x \quad \text{إذن} \end{aligned}$$

$$x \rightarrow \tan x \text{ قابلة للاشتقاق في كل نقطة من } \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \tan' x = 1 + \tan^2 x \quad \text{و}$$

**نتائج**

$$\text{* الدالة الحدودية قابلة للاشتقاق في } \mathbb{R}$$

$$\text{* الدالة الجدرية قابلة للاشتقاق في كل نقطة من حيز تعريفها}$$

أمثلة

$$f(x) = \frac{2x^3 - 3x}{x^2 + x - 2} \quad \text{نعتبر}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{1; -2\}$$

$$f \text{ الدالة الجدرية ومنه } f \text{ قابلة للاشتقاق في كل نقطة من } \mathbb{R} - \{1; -2\}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{1; -2\} \quad f'(x) = \frac{(3x^2 - 3)(x^2 + x - 2) - (2x + 1)(2x^3 - 3x)}{(x^2 + x - 2)^2} = \dots \quad \text{و}$$

$$\text{-8 مشتقة } f(ax+b) \text{ - مشتقة } \sqrt{f}$$

**مبرهنة**

$$\text{ليكن المجال } J \text{ صورة المجال } I \text{ بالدالة التآلفية } x \rightarrow ax+b \\ \text{إذا كانت } f \text{ قابلة للاشتقاق على } J \text{ فإن } g : x \rightarrow f(ax+b) \text{ قابلة للاشتقاق على } I \text{ و}$$

$$\forall x \in I \quad g'(x) = af'(ax+b)$$

$$\text{مثال: نعتبر } f(x) = \sin\left(5x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 5 \cos\left(5x - \frac{\pi}{3}\right) \quad \text{و} \quad f \text{ قابلة للاشتقاق على } \mathbb{R}$$

**خاصة**



لتكن  $f$  دالة موجبة قطعاً و قابلة للاشتقاق على مجال  $I$

$$\forall x \in I \quad (\sqrt{f})'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} \quad \text{و} \quad \sqrt{f} \text{ قابلة للاشتقاق على } I$$

مثال: نعتبر  $f(x) = \sqrt{-x^2 + x}$

$$D_f = [0;1]$$

دالة موجبة قطعاً و قابلة للاشتقاق على مجال  $]0;1[$

$$\forall x \in ]0;1[ \quad f'(x) = \frac{-2x+1}{2\sqrt{-x^2+x}} \quad \text{و} \quad f \text{ قابلة للاشتقاق على } [0;1]$$

### جدول مشتقات بعض الدوال

$D_{f'}$	$f'(x)$	$f(x)$
$\mathbb{R}$	0	$a$
$\mathbb{R}$	1	$x$
$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$
$\mathbb{R}$	$nx^{n-1}$	$x^n \quad n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$
$\mathbb{R}^*$	$nx^{n-1}$	$x^n \quad n \in \mathbb{Z}^{*-}$
$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}$
$\mathbb{R}$	$-\sin x$	$\cos x$
$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\sin x$
$\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$	$1 + \tan^2 x$	$\tan x$
$\mathbb{R}$	$-a \sin(ax+b)$	$\cos(ax+b)$
$\mathbb{R}$	$a \cos(ax+b)$	$\sin(ax+b)$

### تمارين

1- أدرس اشتقاق  $f$  و حدد الدالة المشتقة في الحالات التالية:

$$f(x) = \frac{x^2+3}{x^2-x} * \quad f(x) = \frac{3x-1}{2x-2} * \quad f(x) = \frac{5}{x^2} * \quad f(x) = 5x^4 + 3x^2 + 4 *$$

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x - \sin x} * \quad f(x) = (\cos x)^5 * \quad f(x) = (x^2 + x)^5 *$$

$$f(x) = x^2 + x|x| * \quad \begin{cases} f(x) = x^2 + x & x \leq 0 \\ f(x) = x^3 - x^2 & x > 0 \end{cases} *$$

$$2- \text{نعتبر } f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x-1}$$

أ- بين أن منحنى  $f$  يقبل مماسين موازيين للمستقيم الذي معادلته  $y = -3x$

ب- أكتب معادلتين هذين المماسين.

### 9- تطبيقات الدالة المشتقة

#### a- قابلية الاشتقاق و المطراف

لتكن  $f$  دالة معرفة على مجال مفتوح  $I$  و  $x_0 \in I$

نعتبر  $f$  قابلة للاشتقاق في  $x_0$  و تقبل مطرافا في  $x_0$

نفترض أن  $f$  تقبل قيمة قصوى نسبية عند  $x_0$

ومنه يوجد مجال مفتوح  $J$  مركزه  $x_0$  ضمن  $I$  حيث  $\forall x \in J \quad f(x) \leq f(x_0)$

$f$  قابلة للاشتقاق في  $x_0$  ومنه  $f'(x_0) = f_d'(x_0) = f_g'(x_0)$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ أي}$$

$$\forall x \leq x_0 \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \text{ و } \forall x \geq x_0 \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \text{ فان } \forall x \in J \quad f(x) \leq f(x_0)$$

ومنه  $f_g'(x_0) \geq 0$  ;  $f_d'(x_0) \leq 0$  أي أن  $f'(x_0) \geq 0$  ;  $f'(x_0) \leq 0$  إذن  $f'(x_0) = 0$

( إذا كانت  $f$  تقبل قيمة دنيا نسبية عند  $x_0$  نتبع نفس الخطوات للحصول على نفس النتائج )

### مبرهنة

لتكن  $f$  دالة معرفة على مجال فتوح  $I$  و  $x_0 \in I$

إذا كانت  $f$  قابلة للاشتقاق في النقطة  $x_0$  و تقبل مطرافا في النقطة  $x_0$  فان  $f'(x_0) = 0$

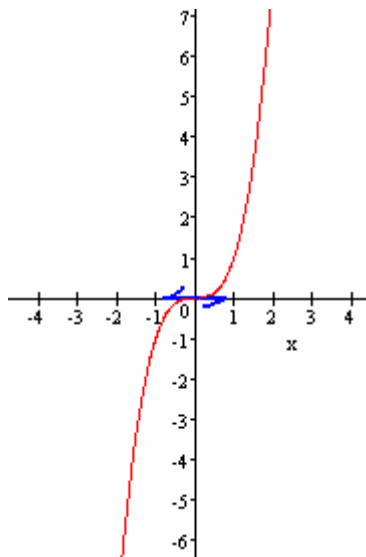
### ملاحظة:

المبرهنة لا تقبل المبرهنة العكسية

مثال  $f(x) = x^3$  ;  $x_0 = 0$

$f$  قابلة للاشتقاق في  $x_0 = 0$  و  $f'(0) = 0$

و مع ذلك  $f$  لا تقبل مطرافا عند 0



### b- الاشتقاق ورتابة دالة

#### مبرهنة

لتكن  $f$  قابلة للاشتقاق على مجال  $I$

تكون  $f$  تزايدية (قطعا) على  $I$  إذا وفقط إذا كانت الدالة المشتقة  $f'$  موجبة على  $I$

أي  $\forall x \in I \quad f'(x) \geq 0$  ( $f'$  موجبة قطعا على  $I$  أي  $\forall x \in I \quad f'(x) > 0$ )

تكون  $f$  تناقصية (قطعا) على  $I$  إذا وفقط إذا كانت الدالة المشتقة  $f'$  سالبة على  $I$

أي  $\forall x \in I \quad f'(x) \leq 0$  ( $f'$  سالبة قطعا على  $I$  أي  $\forall x \in I \quad f'(x) < 0$ )

تكون  $f$  ثابتة على  $I$  إذا كانت الدالة المشتقة  $f'$  منعدمة على  $I$  أي  $\forall x \in I \quad f'(x) = 0$

### مثال

نعتبر  $f(x) = x^3 - 6x + 1$

أدرس تغيرات  $f$  و أعط جدول تغيرات  $f$  ( في جدول التغيرات يجب تحديد النهايات )

حدد مطاريف  $f$  ان وجدت

الجواب

\* مجموعة تعريف  $D_f = \mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = (x^3)' - (6x)' + (1)' = 3x^2 - 6 = 3(x^2 - 2) \text{ ومنه } f(x) = x^3 - 6x + 1$$

إشارة  $f'(x)$  هي إشارة  $x^2 - 2$

$x$	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$+\infty$	
$x^2 - 2$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$

ومنه  $f'$  موجبة على كل  $[\sqrt{2}; +\infty[$  و  $]-\infty; -\sqrt{2}]$  و سالبة على  $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$   
ومنه  $f$  تزايدية على كل  $[\sqrt{2}; +\infty[$  و  $]-\infty; -\sqrt{2}]$  و تناقصية على  $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$   
جدول التغيرات

$x$	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$f$	$-\infty$	$10\sqrt{2}+1$	$-4\sqrt{2}+1$	$+\infty$	

من خلا جدول التغيرات نستنتج أن  $f$  تقبل قيمة قصوى عند  $-\sqrt{2}$  و دنيا عند  $\sqrt{2}$

**ملاحظة** لتكن  $f$  قابلة للاشتقاق في  $x_0$

$f$  تقبل مطرافا في  $x_0$  إذا و فقط إذا كانت  $f'$  تنعدم في  $x_0$  و تتغير إشارتها في مجال مفتوح

يحتوي على  $x_0$

### 10- المعادلة التفاضلية $y'' + \omega^2 y = 0$

تؤدي دراسة بعض الظواهر الفيزيائية و البيولوجية و الاقتصادية و غيرها إلى معادلات يكون فيها المجهول دالة و تحتوي على مشتقة أو مشتقات هذه الدالة.

هذا النوع من المعادلات يسمى المعادلات التفاضلية

#### تعريف

ليكن  $\omega$  عددا حقيقيا غير منعدم

المعادلة  $y'' + \omega^2 y = 0$  تسمى معادلة تفاضلية.

كل دالة  $f$  قابلة للاشتقاق مرتين على  $\mathbb{R}$  و تحقق  $f''(x) + \omega^2 f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$  تسمى حلا

للمعادلة  $y'' + \omega^2 y = 0$

أمثلة  $y'' + 4y = 0$  و  $y'' + \sqrt{2}y = 0$  و  $y'' + \frac{3}{2}y = 0$  معادلات تفاضلية

#### خاصية

ليكن  $\omega$  عددا حقيقيا غير منعدم

الحل العام للمعادلة  $y'' + \omega^2 y = 0$  هو مجموعة الدوال  $y$  المعرفة كما يلي  $x \rightarrow \alpha \cos \omega x + \beta \sin \omega x$

حيث  $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$

#### ملاحظة

حل المعادلة  $y'' + \omega^2 y = 0$  يرجع إلى تحديد الحل العام لهذه المعادلة

#### مثال

حل المعادلة  $y'' + 4y = 0$

لدينا  $\omega^2 = 4$  ومنه  $\omega = 2$  يمكن أخذ  $\omega = -2$  هذا لن يغير مجموعة الحلول

الحل العام لهذه المعادلة هو مجموعة الدوال  $y : x \rightarrow \alpha \cos 2x + \beta \sin 2x$  حيث  $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$

#### معادلة تفاضلية خاصة

حل المعادلة  $y'' = 0$

إذا كان  $y'' = 0$  فإن  $y'$  دالة ثابتة ومنه الحل العام لهذه المعادلة هو مجموعة الدوال  $y : x \rightarrow ax + b$

حيث  $(a; b) \in \mathbb{R}^2$