

# هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

## النهايات

|                |             |
|----------------|-------------|
| الدورة الثانية | الدرس الأول |
| 10 ساعة        |             |

القدرات المنشورة

- . حساب نهايات الدوال الخدودية والدوال الخذرية والدوال اللاحذرية:
- . حساب نهايات الدوال المثلثية البسيطة باستعمال النهايات الاعتيادية

1- **النهاية لا منتهية عند  $+\infty$  أو عند  $-\infty$**

نعتبر الدالة  $f$  حيث  $f(x) = x^3$

1- أرسم  $f$

2- أتمم الجدول التالي

|        |                  |                 |              |             |     |    |            |             |                |                 |
|--------|------------------|-----------------|--------------|-------------|-----|----|------------|-------------|----------------|-----------------|
| $x$    | $-10^{10^{100}}$ | $-10^{10^{12}}$ | $-10^{10^9}$ | $-10^{100}$ | -10 | 10 | $10^{100}$ | $10^{10^9}$ | $10^{10^{12}}$ | $10^{10^{100}}$ |
| $f(x)$ |                  |                 |              |             |     |    |            |             |                |                 |

من خلال الشكل والجدول

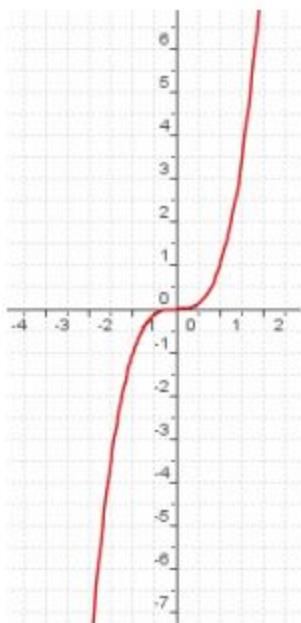
ماذا تستنتج لـ  $f(x)$  عندما يأخذ  $x$  قيمًا أكبر فأكبر و موجبة أي عندما يقول  $x$  إلى  $+\infty$

ماذا تستنتاج لـ  $f(x)$  عندما يأخذ  $x$  قيمًا أصغر فأصغر و سالبة أي عندما يقول  $x$  إلى  $-\infty$

نلاحظ من خلال الجدول والمنحنى عندما يأخذ  $x$  قيمًا أكبر فأكبير و موجبة فان  $f(x)$  تأخذ قيمًا أكبر فأكبير و موجبة و تؤول إلى  $+\infty$  عندما يقول  $x$  إلى  $+\infty$

نقول إن نهاية  $f(x)$  هي  $+\infty$  عندما يقول  $x$  إلى  $+\infty$

نكتب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$



نلاحظ من خلال الجدول والمنحنى عندما يأخذ  $x$  قيمًا أصغر فأصغر و سالبة فان  $f(x)$  تأخذ قيمًا أصغر فأصغر و سالبة و تؤول إلى  $-\infty$  عندما يقول  $x$  إلى  $-\infty$

نقول إن نهاية  $f(x)$  هي  $-\infty$  عندما يقول  $x$  إلى  $-\infty$

نكتب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

## كتابات و نهايات اعتيادية

لتكن  $f$  دالة عدديّة معرفة على مجال  $[a; +\infty]$

إذا كان  $f(x)$  يقول إلى  $+\infty$  عندما يقول  $x$  إلى  $+\infty$  فإننا نكتب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  أو  $f(x) \rightarrow +\infty$

و تقرأ نهاية  $f(x)$  هي  $+\infty$  عندما يقول  $x$  إلى  $+\infty$

إذا كان  $f(x)$  يقول إلى  $-\infty$  عندما يقول  $x$  إلى  $+\infty$  فإننا نكتب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  أو  $f(x) \rightarrow -\infty$

و تقرأ نهاية  $f(x)$  هي  $-\infty$  عندما يقول  $x$  إلى  $+\infty$

لتكن  $f$  دالة عددية معرفة على مجال  $]-\infty; a]$

إذا كان  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  أو  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  فإننا نكتب  $x$  إلى  $-\infty$  و تقرأ نهاية  $f(x)$  هي  $+\infty$  عندما يقول  $x$  إلى  $-\infty$   
 إذا كان  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  أو  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  فإننا نكتب  $x$  إلى  $+\infty$  و تقرأ نهاية  $f(x)$  هي  $-\infty$  عندما يقول  $x$  إلى  $+\infty$

## نهايات اعتيادية

ليكن  $n$  عدداً صحيحاً طبيعياً غير منعدم

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$$

$$\text{إذا كان } n \text{ زوجي} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$$

$$\text{إذا كان } n \text{ فردي} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

## 2- النهاية منتهية عند $+\infty$ أو عند $-\infty$

نعتبر الدالة  $f$  حيث  $f(x) = \frac{1}{x^2}$

1- باستعمال أحد البرامج المعلوماتية أرسّم  $C_f$

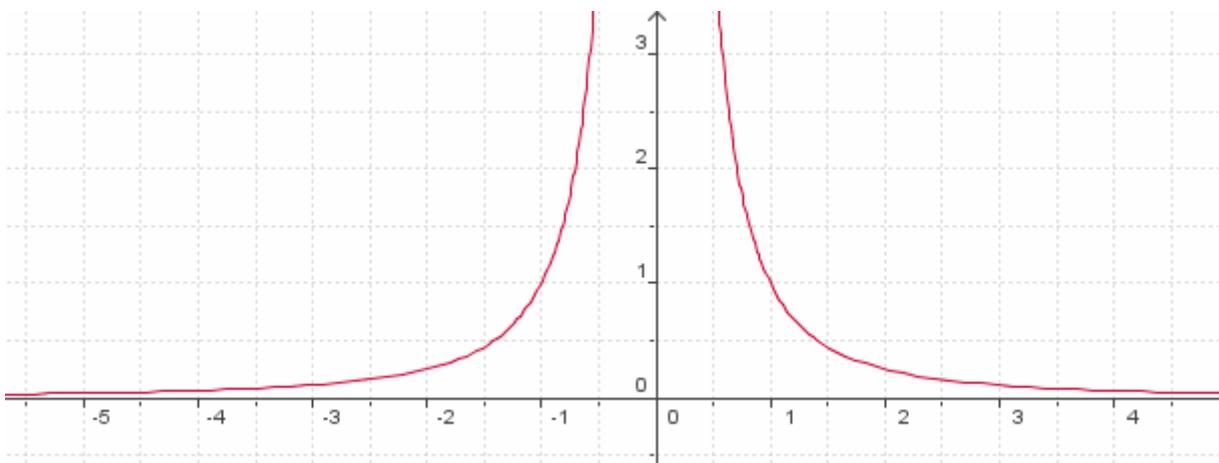
2- أتمم الجدول التالي

| $x$    | $-10^{10^{100}}$ | $-10^{10^{12}}$ | $-10^{10^9}$ | $-10^{100}$ | $-10$ | $10$ | $10^{100}$ | $10^{10^9}$ | $10^{10^{12}}$ | $10^{10^{100}}$ |
|--------|------------------|-----------------|--------------|-------------|-------|------|------------|-------------|----------------|-----------------|
| $f(x)$ |                  |                 |              |             |       |      |            |             |                |                 |

من خلال الشكل والجدول

ماذا تستنتج لـ  $f(x)$  عندما يأخذ  $x$  قيمًا أكبر فأكبير و موجبة أي عندما يقول  $x$  إلى  $+\infty$

ماذا تستنتج لـ  $f(x)$  عندما يأخذ  $x$  قيمًا أصغر فأصغر و سالبة أي عندما يقول  $x$  إلى  $-\infty$



نلاحظ في كلتا الحالتين  $f(x)$  يؤول إلى 0 نكتب 0

نعتبر الدالة  $f$  حيث

1- أرسم  $C_f$

2- خد قيمًا أكبر ومحبطة وأملئ بها الجدول

|        |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|--------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| $x$    |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| $f(x)$ |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

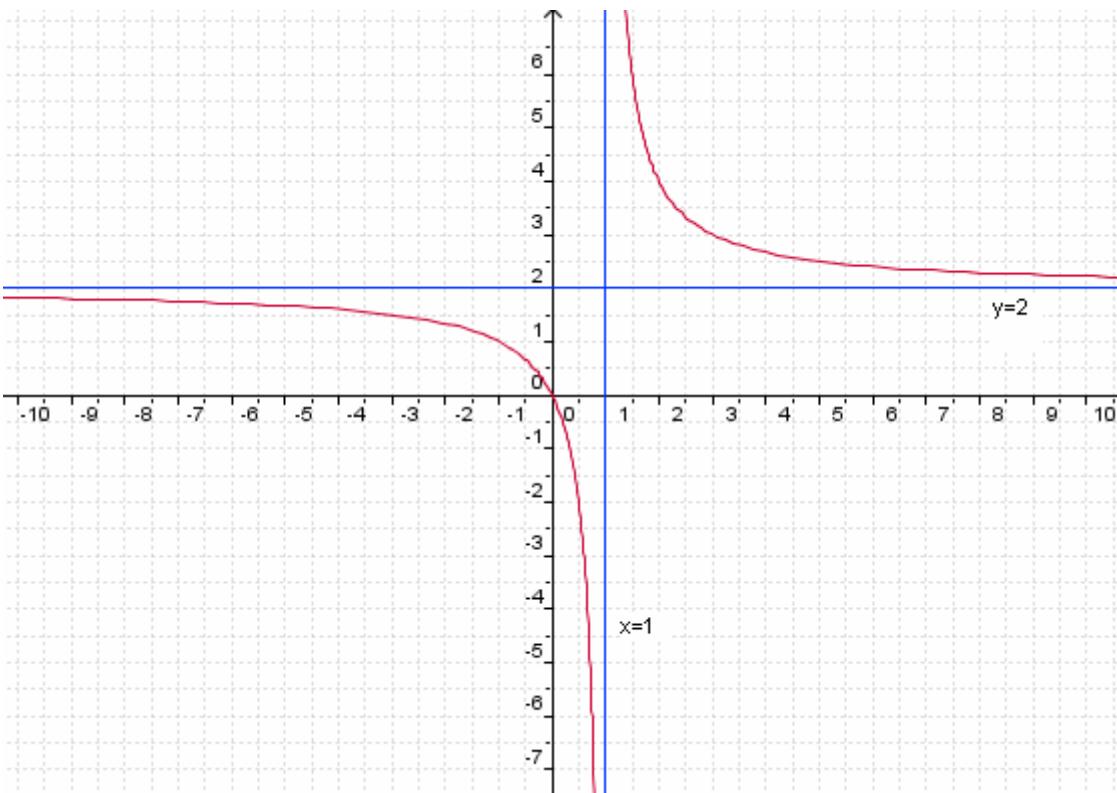
من خلال الشكل والجدول

ما زالت تستنتج  $L(f)$  عندما يأخذ  $x$  قيمًا أكبر ومحبطة أي عندما يؤول  $x$  إلى  $+\infty$

خد قيمًا أصغر فأصغر وسالبة وأملئ بها الجدول

|        |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|--------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| $x$    |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| $f(x)$ |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

ما زالت تستنتج  $L(f)$  عندما يأخذ  $x$  قيمًا أصغر فأصغر وسالبة أي عندما يؤول  $x$  إلى  $-\infty$



نلاحظ في كلتا الحالتين  $f(x)$  يؤول إلى 2 نكتب

**النهاية متحدة عند  $\pm\infty$**

لتكن  $f$  يحتوي حيز تعريفها على مجال من نوع  $[a; +\infty[$

إذا كان  $f(x)$  تؤول إلى  $l$  عندما يؤول  $x$  إلى  $+\infty$  فإننا نكتب  $l$

**النهاية متحدة عند  $-\infty$**

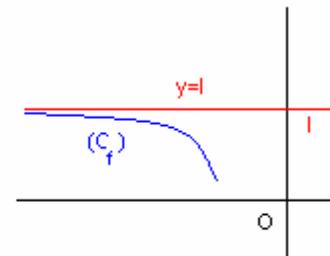
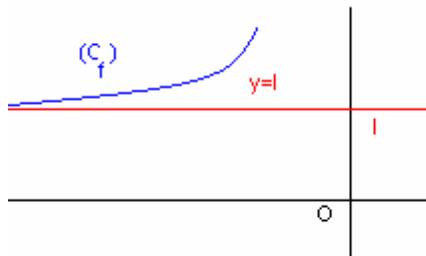
لتكن  $f$  يحتوي حيز تعريفها على مجال من نوع  $]-\infty; a]$

إذا كان  $f(x)$  تؤول إلى  $l$  عندما يؤول  $x$  إلى  $-\infty$  فإننا نكتب  $l$

## ملاحظات

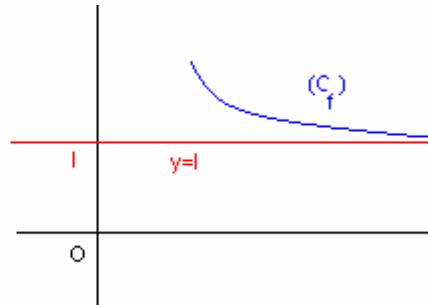
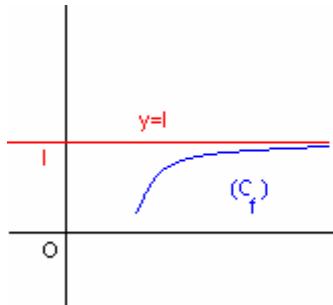
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l^*$$

منحنى الدالة يقترب أكثر و أكثر من المستقيم ذا المعادلة  $y = l$  عندما يؤول  $x$  إلى  $-\infty$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l^*$$

منحنى الدالة يقترب أكثر و أكثر من المستقيم ذا المعادلة  $y = l$  عندما يؤول  $x$  إلى  $+\infty$



-\* إذا كانت  $f$  زوجية فان  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

-\* إذا كانت  $f$  فردية فان  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

## نهايات اعتيادية

$$\forall (k; n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^* \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{x}} = 0$$

## خاصية

لتكن  $f$  دالة عدديّة و  $l$  عدداً حقيقياً

• اذا كانت  $f$  تقبل نهاية  $l$  في  $+\infty$  أو  $(-\infty)$  فان هذه النهاية وحيدة

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - l) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - l) = 0$$

## تمرين

$$f(x) = \frac{-3x^2 + 1}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3$$

## الجواب

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (-3) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^2 + 1}{x^2} + 3 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \\ \text{اذن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= 3 \end{aligned}$$

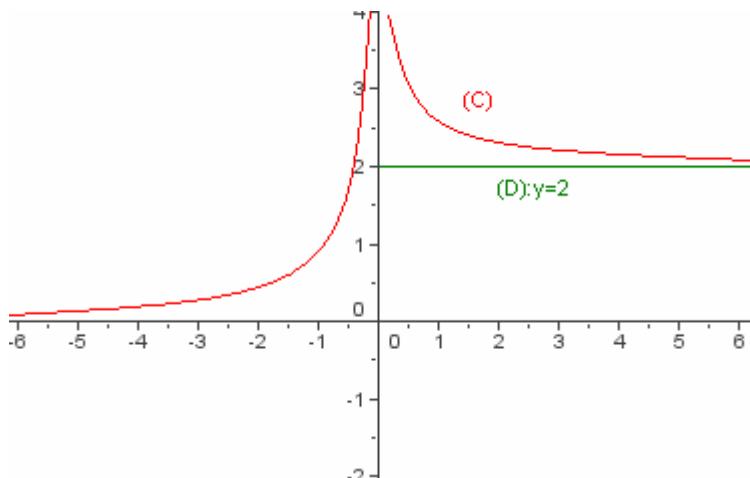
**تمرين : قراءة نهايات مبيانا**

لتكن  $f$  دالة عدديّة معرفة على  $\mathbb{R}^*$

من خلال الشكل

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$



من خلال الشكل

المنحنى يقترب من المستقيم  $y = 2$  (D) عندما يؤول  $x$  إلى  $+\infty$  إذن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$

المنحنى يقترب من محور الأفاسيل عندما يؤول  $x$  إلى  $-\infty$  إذن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

### 3- نهاية متنمية و لا متنمية لدالة في نقطة نشاط

نعتبر الدالة  $f$  حيث  $g(x) = \frac{1}{x^2}$  و  $f(x) = x^2$

أ/ أرسم  $C_f$

ب/ أتمم الجدول التالي

|        |      |      |        |             |            |       |     |     |
|--------|------|------|--------|-------------|------------|-------|-----|-----|
| $x$    | -0,2 | -0,1 | -0,001 | $-10^{-30}$ | $10^{-30}$ | 0,001 | 0,1 | 0,2 |
| $f(x)$ |      |      |        |             |            |       |     |     |

من خلال الشكل و الجدول ماذا تلاحظ استنتاج  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

2- أتمم الجدول التالي

|        |      |      |        |             |            |       |     |     |
|--------|------|------|--------|-------------|------------|-------|-----|-----|
| $x$    | -0,2 | -0,1 | -0,001 | $-10^{-30}$ | $10^{-30}$ | 0,001 | 0,1 | 0,2 |
| $g(x)$ |      |      |        |             |            |       |     |     |

من خلال الجدول ماذا تلاحظ تضيّن  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$

1/ من خلال الشكل و الجدول

نلاحظ أن  $f(x)$  تؤول إلى 0 عندما يؤول  $x$  إلى 0

نقول إن نهاية  $f(x)$  هي 0 عند 0

نكتب  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

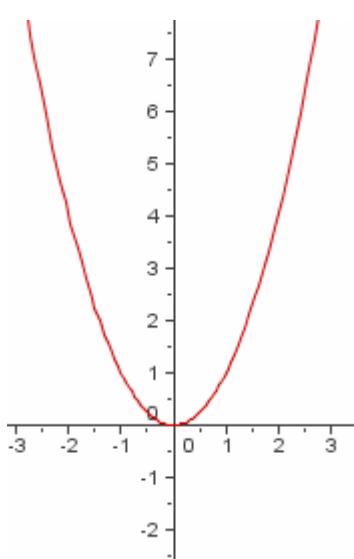
2/ من خلال الجدول

نلاحظ أن  $f(x)$  تأخذ قيمًا أكبر فأكبر و موجبة أي تؤول إلى  $+\infty$  عندما

يؤول  $x$  إلى 0

نقول إن نهاية  $f(x)$  هي  $+\infty$  عند 0

نكتب  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$



## نهاية متميزة لدالة في نقطة

ليكن  $a$  و  $l$  عددين حقيقيين و  $f$  دالة عددية يحتوي حيز تعريفها على مجال من نوع  $[a-\alpha; a+\alpha]$  أو مجموعة من نوع  $\{a\}$  حيث  $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$  إذا كان  $f(x)$  تؤول إلى  $l$  عندما يقول  $x$  إلى  $a$  فإننا نكتب  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$

### خاصية

ليكن  $a$  و  $l$  عددين حقيقيين إذا كان  $\lim_{x \rightarrow 0} x^n = 0$  فإن  $f(x)$  تقبل  $l$  في  $a$  عن النهاية وحيدة

### نهايات اعتيادية

ليكن  $n$  عدداً صحيحاً طبيعياً غير منعدم

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^n = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^3 = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \quad \text{أمثلة}$$

## نهاية لامتميزة لدالة في نقطة

ليكن  $a$  و  $l$  عددين حقيقيين و  $f$  دالة عددية يحتوي حيز تعريفها على مجال من نوع  $[a-\alpha; a+\alpha]$  أو مجموعة من نوع  $\{a\}$  حيث  $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$  إذا كان  $f(x)$  تؤول إلى  $+\infty$  عندما يقول  $x$  إلى  $a$  فإننا نكتب  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  إذا كان  $f(x)$  تؤول إلى  $-\infty$  عندما يقول  $x$  إلى  $a$  فإننا نكتب  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$

## 3- النهاية على اليمين- النهاية على اليسار

### نشاط

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة بـ

$$f(x) = \frac{|x-1|(x+2)}{x-1}$$

حدد  $D_f$

أنشئ  $C_f$

من خلال التمثيل المباني حدد إلى ماذا يؤول  $f(x)$  عندما يقترب  $x$  من 1 على اليمين  
من خلال التمثيل المباني حدد إلى ماذا يؤول  $f(x)$  عندما يقترب  $x$  من 1 على اليسار

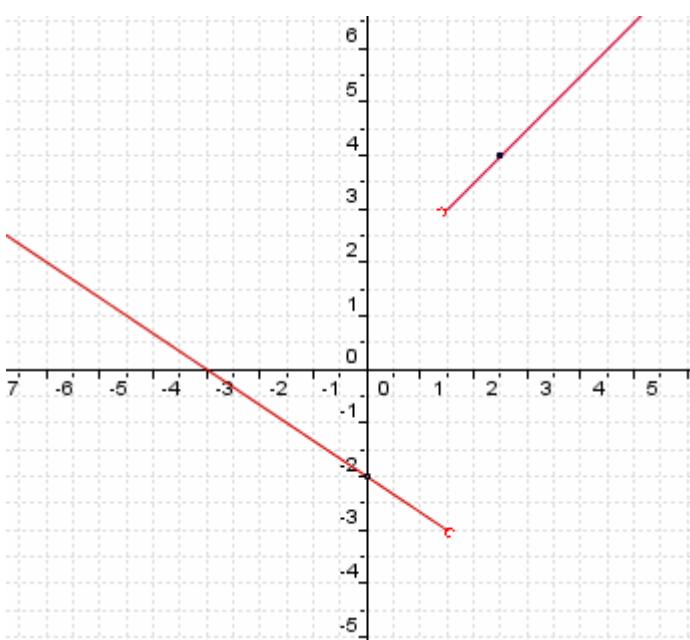
$$D_f = \mathbb{R} - \{1\}$$

نلاحظ أن كلما اقتربنا من 1 على اليمين إلا و  $f(x)$  تقترب من 3 نقول إن نهاية  $f(x)$  عندما يؤول  $x$  إلى 1 على اليمين هي 3 نكتب

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3 \quad \text{أو} \quad \lim_{x > 1} f(x) = 3$$

نلاحظ أن كلما اقتربنا من 1 على اليسار إلا و  $f(x)$  تقترب من -3 نقول إن نهاية  $f(x)$  عندما يؤول  $x$  إلى 1 على اليسار هي -3 نكتب

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -3 \quad \text{أو} \quad \lim_{x < 1} f(x) = -3$$



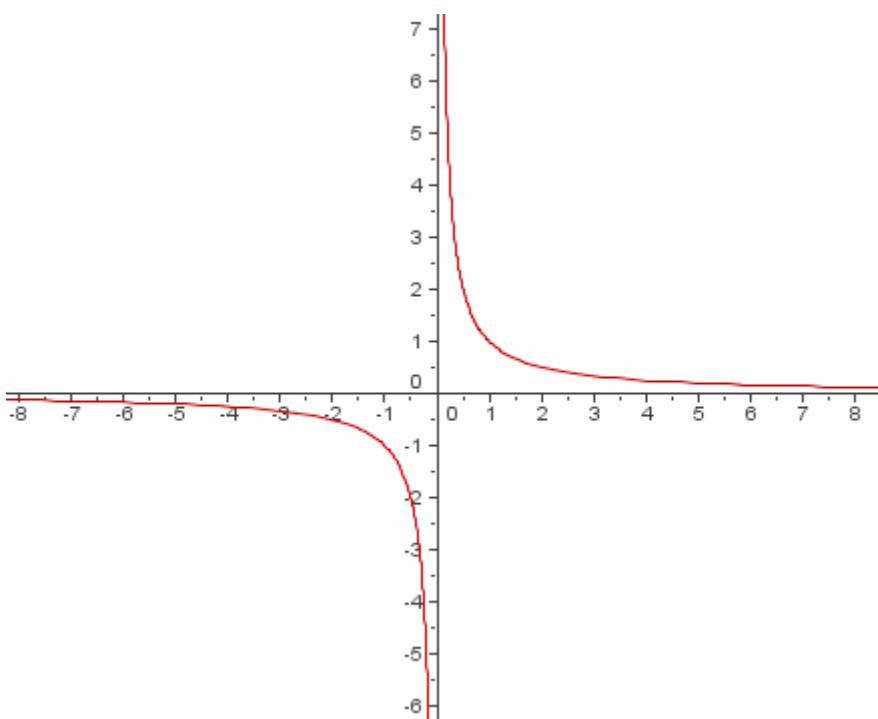
## نشاط

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة بـ  $\frac{1}{x}$

$D_f$   
أنشئ  
 $C_f$

من خلال التمثيل المباني حدد إلى ماذا يقول  $f(x)$  عندما يقترب  $x$  من 0 على اليمين  
من خلال التمثيل المباني حدد إلى ماذا يقول  $f(x)$  عندما يقترب  $x$  من 0 على اليسار

-----



نلاحظ أن كلما اقتربنا من 0 على اليمين فان  $f(x)$  تؤول  $+\infty$  + نقول إن نهاية  $f(x)$  عندما يؤول  $x$  إلى 0 على اليمين هي  $+\infty$  + نكتب  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

أو  
 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$

نلاحظ أن كلما اقتربنا من 0 على اليسار فان  $f(x)$  تؤول  $-\infty$  - نقول إن نهاية  $f(x)$  عندما يؤول  $x$  إلى 0 على اليسار هي  $-\infty$  - نكتب  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$

أو  
 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = -\infty$

ليكن  $a$  و  $l$  عددين حقيقيين

إذا كان  $f(x)$  تؤول إلى  $l$  عندما يؤول  $x$  إلى  $a$  على اليمين فإننا نكتب  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = l$  أو  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$

إذا كان  $f(x)$  تؤول إلى  $l$  عندما يؤول  $x$  إلى  $a$  على اليسار فإننا نكتب  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = l$  أو  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$

إذا كان  $f(x)$  تؤول إلى  $+\infty$  عندما يؤول  $x$  إلى  $a$  على اليمين فإننا نكتب  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = +\infty$  أو  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$

إذا كان  $f(x)$  تؤول إلى  $+\infty$  عندما يؤول  $x$  إلى  $a$  على اليسار فإننا نكتب  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = +\infty$  أو  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$

إذا كان  $f(x)$  تؤول إلى  $-\infty$  عندما يؤول  $x$  إلى  $a$  على اليمين فإننا نكتب  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = -\infty$  أو  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$

إذا كان  $f(x)$  تؤول إلى  $-\infty$  عندما يؤول  $x$  إلى  $a$  على اليسار فإننا نكتب  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = -\infty$  أو  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$

## نهايات اعتيادية

ليكن  $n$  عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$$

إذا كان  $n$  زوجيا  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = +\infty$

إذا كان  $n$  فرديا  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$$

أمثلة

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^4} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^3} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

مبرهنة

لتكن  $f$  دالة عددية

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l \quad \text{تكافئ } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \quad \text{تكافئ}$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \quad \text{تكافئ}$$

**تمرين**

لتكن  $f$  دالة عددية حيث

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x} & x > 0 \\ f(x) = x^3 & x \leq 0 \end{cases}$$

حدد  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

الجواب

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \quad \text{ومنه} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^3 = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$$

إذن  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

**تمرين**

لتكن  $f$  دالة عددية حيث  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{|x + 2|}$

-1 - بين أن  $\lim_{x \rightarrow -2} x + 2 = 4$  و  $\lim_{x \rightarrow -2} x - 2 = -4$

-2 - استنتج  $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$

-3 - هل الدالة  $f$  تقبل نهاية في  $x = -2$

الجواب

-1 - نبين أن  $\lim_{x \rightarrow -2} x - 2 = -4$

نضع  $X - 2 = x$  أي  $X = x + 2$   
عندما يقول  $x \rightarrow -2$  فإن  $X \rightarrow 0$  تؤول إلى 0

$$\lim_{x \rightarrow -2} x - 2 = \lim_{X \rightarrow 0} X - 4$$

وحيث أن  $\lim_{X \rightarrow 0} X - 4 = 0$  فإن  $\lim_{x \rightarrow -2} x - 2 = -4$

نبين أن  $\lim_{x \rightarrow -2} x + 2 = 4$

# هذا الملف تم تحميله من موقع Talamid.ma

$$\lim_{x \rightarrow -2} -x + 2 = \lim_{X \rightarrow 0} -X + 4$$

$\lim_{x \rightarrow -2} -x - 2 = 4$  إذن  $\lim_{X \rightarrow 0} -X + 4 = 44$   $\lim_{X \rightarrow 0} [(-X + 4) - 4] = \lim_{X \rightarrow 0} -X = 0$  وحيث أن

/2 نستنتج  $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$

لدينا 2  $\forall x > -2$   $f(x) = \frac{x^2 - 4}{|x + 2|} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x + 2} = x - 2$

ومنه  $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} x - 2 = -4$

لدينا 2  $\forall x < -2$   $f(x) = \frac{x^2 - 4}{|x + 2|} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{-(x + 2)} = -x + 2$

ومنه  $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} -x - 2 = 4$

-3 / لدينا إذن الدالة  $f$  لا تقبل نهاية في -2

## 4- العمليات على النهايات

نقبل جميع العمليات الآتية

نعتبر دالتي  $f$  و  $g$ .

عند  $x_0$  أو عند  $x_0$  على اليمين أو عند  $0$  على اليسار أو عند  $+\infty$  أو عند  $-\infty$  تكون لدينا النتائج التالية:

### A- نهاية مجموع

| $f + g$ نهاية | $g$ نهاية | $f$ نهاية |
|---------------|-----------|-----------|
| $l + l'$      | $l'$      | $l$       |
| $+\infty$     | $+\infty$ | $l$       |
| $-\infty$     | $-\infty$ | $l$       |
| $+\infty$     | $+\infty$ | $+\infty$ |
| $-\infty$     | $-\infty$ | $-\infty$ |
| شكل غير محدد  | $-\infty$ | $+\infty$ |

### B- نهاية حدا

| $f \times g$ نهاية        | $g$ نهاية | $f$ نهاية      |
|---------------------------|-----------|----------------|
| $l \times l'$             | $l'$      | $l$            |
| مع وضع إشارة $\infty$     | $+\infty$ | $l \neq 0$ $l$ |
| مع وضع عكس إشارة $\infty$ | $-\infty$ | $l \neq 0$ $l$ |
| شكل غير محدد              | $+\infty$ | 0              |
| شكل غير محدد              | $-\infty$ | 0              |
| $+\infty$                 | $+\infty$ | $+\infty$      |
| $+\infty$                 | $-\infty$ | $-\infty$      |
| $-\infty$                 | $-\infty$ | $+\infty$      |

### ملاحظة:

لحساب نهاية  $\lambda f$  حيث  $\lambda \in \mathbb{R}$  يمكن اعتبار  $\lambda f$  كجدا الدالة

الثابتة  $\lambda \rightarrow x$  التي نهايتها هي  $\lambda$  و الدالة  $f$

## جـ- نهاية خارج

| $\frac{f}{g}$ نهاية          | $g$ نهاية          | $f$ نهاية            |
|------------------------------|--------------------|----------------------|
| $\frac{l}{l'}$               | $l' \neq 0$ و $l'$ | $l$                  |
| 0                            | $+\infty$          | $l$                  |
| 0                            | $-\infty$          | $l$                  |
| $+\infty$                    | $0^+$              | $+\infty$ أو $l > 0$ |
| $-\infty$                    | $0^+$              | $-\infty$ أو $l < 0$ |
| $-\infty$                    | $0^-$              | $+\infty$ أو $l > 0$ |
| $+\infty$                    | $0^-$              | $-\infty$ أو $l < 0$ |
| شكل غير محدد                 | 0                  | 0                    |
| شكل غير محدد                 | $+\infty$          | $+\infty$            |
| شكل غير محدد                 | $-\infty$          | $-\infty$            |
| شكل غير محدد                 | $-\infty$          | $+\infty$            |
| $\infty$ مع وضع إشارة /      | $l \neq 0$ حيث $l$ | $+\infty$            |
| $-\infty$ مع وضع عكس إشارة / | $l \neq 0$ حيث $l$ | $-\infty$            |

## دـ- نهاية دالة حدودية - دالة حدودية

لتكن  $P(x)$  و  $Q(x)$  حدوديتين

$$Q(a) \neq 0 \quad \text{في حالة} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)} \quad \lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a)$$

إذا كانت  $ax^n$  و  $bx^m$  هما على التوالي حدوديي  $P(x)$  و  $Q(x)$  الأكبر درجة فان

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} ax^n \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} ax^n$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax^n}{bx^m} \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^n}{bx^m} \quad \text{و}$$

## أمثلة

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^3 - x^2 + 3x - 1 = 2^3 - 2^2 + 6 - 1 = 9$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-3x^2 - x + 1}{3x^3 + 2x^2 - 3} = \frac{-3(-1)^2 - (-1) + 1}{3(-1)^3 + 2(-1)^2 - 3} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -4x^5 + 3x^2 - 5x + 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} -4x^5 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^7 + 7x^3 - x + 31 = \lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^7 = +\infty$$

# هذا الملف تم تحميله من موقع Talamid.ma

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x^5 + 3x^2 - 5x + 1}{3x^2 - x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x^5}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{3} x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^7 + 7x^3 - x + 31}{x^9 + 3x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^7}{x^9} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^5 + 3x^2 - 5x + 1}{3x^5 - x^4 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^5}{3x^5} = \frac{7}{3}$$

**تمرين**

حدد النهايات

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (1-x)^5 (-2x^2 + 5) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 7x^5 + 3 + \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x}{x^2 + x - 6}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3}{-x^2 + x} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x - 5}{x - 1} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{2x^2 + x - 3} ; \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{x^2 - 2x - 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x - 2}{x^2 - 3x + 2} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right)$$

**الجواب**

نحدد النهايات

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x}{x^2 + x - 6} = \frac{6}{6} = 1 \quad \text{ومنه} \quad \lim_{x \rightarrow 3} x^2 + x - 6 = 9 + 3 - 6 = 6 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 3} x^2 - x = 9 - 3 = 6 \quad \text{* لدينا}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 7x^5 + 3 + \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty \quad \text{ومنه} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 7x^5 + 3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 7x^5 = +\infty \quad *$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (1-x)^5 (-2x^2 + 5) = -\infty \quad \text{ومنه} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (1-x)^5 = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^5 = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^2 + 5 = \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^2 = -\infty \quad *$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x - 2} = -\infty \quad \text{إذن} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} x - 2 = 0^- \quad \text{ومنه} \quad x - 2 < 0 \quad \text{* إذا كان } x < 2 \text{ فان}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x - 5}{x - 1} \quad \text{* نحدد}$$

|       |    |   |    |
|-------|----|---|----|
| x     | -∞ | 1 | +∞ |
| x - 1 | -  | 0 | +  |

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x - 5}{x - 1} = -\infty \quad \text{إذن} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} 2x - 5 = -3 \quad \text{لدينا} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} x - 1 = 0^+ = 0 \quad \text{ومنه}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x} \quad \text{* نحدد}$$

نحصل على الشكل الغير المحدد  $(+\infty - \infty)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x} = \infty \quad \text{فان} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} - 1 = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty \quad \text{وحيث}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} (\sqrt{x} - 1) \quad \frac{0}{0} \quad \text{نحدد} \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{x^2 - 2x - 3} \quad \text{* بتعويض } x \text{ نحصل على الشكل الغير المحدد}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{-1, 3\} \quad \frac{x + 1}{x^2 - 2x - 3} = \frac{x + 1}{(x + 1)(x - 3)} = \frac{1}{x - 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x^2 - 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x-3} = -\frac{1}{4} \quad \text{ومنه}$$

\* نحدد  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{2x^2 + x - 3}$  بتعويض  $x$  نحصل على الشكل الغير المحدد  $\frac{0}{0}$

ومنه الحدوديتان  $x^2 + x - 2$  و  $x^2 + x - 3$  تقبلان القسمة على  $x-1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{2x^2 + x - 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(2x+3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{2x+3} = \frac{3}{5}$$

\* نحدد  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right)$

لدينا  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty$  و منه نحصل على الشكل الغير المحدد  $(+\infty - \infty)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( 1 - \frac{1}{x} \right) = -\infty \quad \text{وحيث} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} \left( 1 - \frac{1}{x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) = -\infty$$

\* نحدد  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x-2}{x^2 - 3x + 2}$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} 3x - 2 = 1$  لدينا  $\lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 - 3x + 2 = 0$

|  |                |           |   |   |           |
|--|----------------|-----------|---|---|-----------|
|  | $x$            | $-\infty$ | 1 | 2 | $+\infty$ |
|  | $x^2 - 3x + 2$ | +         | 0 | - | 0         |

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x-2}{x^2 - 3x + 2} = -\infty \quad \text{إذن}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 - 3x + 2 = 0^- \quad \text{ومنه}$$

## 6 - نهايات الدوال اللاحدارية

### خاصية

لتكن  $f$  دالة عددية معرفة على مجال من شكل  $[a; +\infty]$

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{l} \quad \text{إذا كانت } l \geq 0 \quad \text{فإن} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{f(x)} = +\infty \quad \text{إذا كانت } l < 0 \quad \text{فإن} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

**ملحوظة:**

الخاصية تبقى صحيحة اذا كان  $x$  يؤول الى  $+\infty$  أو الى  $-\infty$  أو الى  $a$  على اليمين أو  $a$  على اليسار

أمثلة:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{1-4x} \quad \text{لنجرب}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{1-4x} = \sqrt{9} = 3 \quad \text{ومنه} \quad \lim_{x \rightarrow -2} 1-4x = 9 \quad \text{لدينا}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3x^2 - 5x + 4} \quad \text{لنجرب}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3x^2 - 5x + 4} = \infty \quad \text{ومنه} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^2 - 5x + 4 = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^2 = +\infty \quad \text{لدينا}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{1 - \frac{1}{x}} \quad \text{لنجرب}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{1 - \frac{1}{x}} = +\infty \quad \text{و منه} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 - \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{لدينا}$$

## 7- النهايات والترتيب

\* إذا كان  $f$  و  $g$  دوال عدديّة و  $I = ]x_0 - \alpha; x_0 + \alpha[$  ضمن حيز تعريف هذه الدوال

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$  و كان  $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0$  فان  $|f(x) - l| \leq u(x)$  ،  $I$  من  $x$

\* إذا كان  $h(x) = l$  و كان  $f \geq h \geq g$  على  $I$  فان  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$

\* إذا كان  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  و كان  $f(x) \geq u(x)$  ،  $I$  من  $x$

\* إذا كان  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$  و كان  $f(x) \leq u(x)$  ،  $I$  من  $x$

### ملاحظة

الخصائص السابقة تبقى صالحة عند  $+\infty$  أو عند  $-\infty$  أو عند  $x_0$  على اليمين أو عند  $x_0$  على اليسار مع تعويض  $I$  بالمجموعة المناسبة

### أمثلة

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sin x$$

لدينا الدالة  $x \rightarrow \sin^2 x$  لا تقبل نهاية

و نعلم أن  $-1 \leq \sin x \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$   $-1 \leq \sin^2 x \leq 1$

و حيث  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sin x = +\infty$  فان  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + \sin x}{x^2 + 1} = 2 \quad \text{نبين أن}$$

$$\left| \frac{2x^2 + \sin x}{x^2 + 1} - 2 \right| = \left| \frac{\sin x - 2}{x^2 + 1} \right| \quad \text{لدينا}$$

$$|\sin x - 2| \leq 3 \quad |\sin x| \leq 1 \quad |\sin x - 2| \leq |\sin x| + 2$$

$$\left| \frac{2x^2 + \sin x}{x^2 + 1} - 2 \right| \leq \frac{3}{x^2 + 1} \quad \text{إذن} \quad \left| \frac{\sin x - 2}{x^2 + 1} \right| \leq \frac{3}{x^2 + 1} \quad \text{و منه}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + \sin x}{x^2 + 1} = 2 \quad \text{فان} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x^2 + 1} = 0 \quad \text{و حيث}$$

### 8- نهايات متعددة

لكل عدد حقيقي  $a$   $\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$  و  $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$

لكل عدد حقيقي  $a$  حيث  $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$   $\lim_{x \rightarrow a} \tan x = \tan a$

$$\lim_{x \rightarrow a} \tan x = \tan a$$

### أمثلة

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1 \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \tan x = \tan \pi = 0$$

$$\forall x \in \left[ -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] \quad |\sin x| \leq |x| \leq |\tan x| \quad \text{بـ / قبل}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

لنجدد  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$   
 حيث  $x \neq 0$   $\frac{1}{|\tan x|} \leq \frac{1}{|x|} \leq \frac{1}{|\sin x|}$  ومنه  $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad |\sin x| \leq |x| \leq |\tan x|$  لدينا

$$|\cos x| \leq \frac{|\sin x|}{x} \leq 1 \quad \text{أي أن} \quad \frac{|\sin x|}{|\tan x|} \leq \frac{|\sin x|}{|x|} \leq \frac{|\sin x|}{|\sin x|}$$

وحيث أن  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  و  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$  فان  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x$  لها نفس الإشارة بجوار 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \times \left( \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{1}{2} \times \left( \frac{\sin X}{X} \right)^2 = \frac{1}{2} \quad \text{ومنه} \quad X = \frac{x}{2} \quad \text{نضع}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{\cos x} = 1 \times \frac{1}{1} = 1 \quad \text{لدينا}$$

### خاصية

|   |   |   |
|---|---|---|
| $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ و | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$ و | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ |
|---|---|---|

### نستخلص

|   |   |
|---|---|
| $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{ax} = 1$ و | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1$ |
|---|---|

### تمرين

|   |  |  |   |
|---|--|--|---|
| $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 3x}$     | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{3x^2}$ | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{4x}$      | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x}$ |
| $\therefore$  | $\therefore$                                   | $\therefore$                                     | $\therefore$                                |
| $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x}{1 + \sin x}$ |  |  |   |
| $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x}$      |  |  |   |
|   |  | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\sin 2x}$ |   |