

المتتاليات العددية

(c) تكون الأعداد  $c$  و  $b$  في هذا الترتيب ثلاث حدود متتابعة  
المتتالية حسابية إذا كان  $a + c = 2b$  يعني  $\frac{a+b}{2} = b$ .

(2) الحد العام.

لتكن  $(u_n)$  متتالية حسابية أساسها  $r$  وحدها الأول  $u_0$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n = U_0 + nr$$

لدينا

ملاحظة:

(1) إذا كان الحد الأول هو  $u_1$  فإن الحد العام هو:

$$U_n = U_1 + (n-1)r$$

(2) إذا كان الحد الأول هو  $u_2$  فإن الحد العام هو:

$$U_n = U_2 + (n-2)r$$

(3) بصفة عامة: إذا كان  $U_p$  و  $U_n$  حدين من متتالية حسابية

$$U_n = U_p + (n-p)r$$

أساسها  $r$  فإن (ترتيب  $p$  غير مهم).

(3) مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية:

لتكن  $(U_n)$  متتالية حسابية أساسها  $r$  وحدها الأول  $u_0$

لدينا:

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = (n+1) \frac{(u_0 + u_n)}{2}$$

$u_0$  الحد الأول للمجموع  $S$

$u_n$  الحد الأخير للمجموع  $S$

$n+1$  عدد حدود المجموع  $S$ .

ملاحظة:

$$(1) \quad u_1 + u_2 + \dots + u_n = n \frac{u_1 + u_n}{2}$$

$$(2) \quad u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = n \frac{u_0 + u_{n-1}}{2}$$

(3) بصفة عامة

$$u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = (n-p+1) \frac{u_p + u_n}{2}$$

(III) المتتاليات الهندسية.

(1) تعريف:

نقول إن المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  هندسية إذا وجد عدد حقيقي  $q$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_{n+1} = q U_n$$

العدد  $q$  يسمى أساس المتتالية

ملاحظات:

(a) تكون متتالية (حدودها غير منعدمة) هندسية إذا وفقط إذا كان خارج حدين متتابعين ثابت وتكون هذه الثابتة هي الأساس.

(b) لكي نبين أن المتتالية  $(U_n)$  هندسية يستحسن حساب  $U_{n+1}$

$$U_{n+1} = q \cdot u_n$$

(c) تكون الأعداد  $c$  و  $b$  في هذا الترتيب ثلاث حدود متتابعة لمتتالية هندسية إذا وفقط إذا كان  $ac = b^2$ .

(I) عموميات.

(1) تعريف:

نسمي متتالية عددية كل تطبيق  $U$  من جزء  $I$  من  $\mathbb{N}$  نحو  $\mathbb{R}$ :

$$U: I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \rightarrow u(n)$$

(2) المتتاليات المحدودة:

تعريف:

نقول إن المتتالية  $(U_n)_{n \in I}$ :

(a) مكبورة إذا وفقط إذا وجد عدد  $M$  بحيث  $(\forall n \in I) U_n \leq M$ .

(b) مصغورة إذا وفقط إذا وجد عدد  $m$  بحيث  $(\forall n \in I) U_n \geq m$ .

(c) محدودة إذا وفقط إذا كانت مكبورة ومصغورة يعني.

إذا وجد عددين  $m$  و  $M$  بحيث  $(\forall n \in I) : m \leq u_n \leq M$ .

ملاحظة:

تكون  $(U_n)_{n \in I}$  محدودة إذا وجد  $k \geq 0$  بحيث  $(\forall n \in I) : |U_n| \leq k$

(3) المتتالية الرتيبة:

تعريف:

نقول إن المتتالية  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ :

(a) تزايدية إذا وفقط إذا كان  $(\forall n \in \mathbb{N}) U_n \leq U_{n+1}$ .

(b) تزايدية قطعاً إذا وفقط إذا كان  $(\forall n \in \mathbb{N}) U_n < U_{n+1}$ .

(c) تناقصية إذا وفقط إذا كان  $(\forall n \in \mathbb{N}) U_n \geq U_{n+1}$ .

(d) تناقصية قطعاً إذا وفقط إذا كان  $(\forall n \in \mathbb{N}) U_n > U_{n+1}$ .

(e) ثابتة إذا وفقط إذا كان  $(\forall n \in \mathbb{N}) U_n = U_{n+1}$ .

ملاحظات:

(1) إذا كانت  $(U_n)$  تزايدية فإن  $u_p \leq u_n$   $p < n$ .

(2) إذا كانت  $(U_n)$  تناقصية فإن  $u_p \geq u_n$   $p < n$ .

(3) من أجل دراسة رتابة المتتالية  $(U_n)$  نقوم بدراسة إشارة

$$u_{n+1} - u_n$$

(\*) إذا كانت  $u_{n+1} - u_n \geq 0$  فإن  $(U_n)$  تزايدية.

(\*) إذا كانت  $u_{n+1} - u_n > 0$  فإن  $(U_n)$  تزايدية قطعاً.

(\*) إذا كانت  $u_{n+1} - u_n \leq 0$  فإن  $(U_n)$  تناقصية.

(\*) إذا كانت  $u_{n+1} - u_n < 0$  فإن  $(U_n)$  تناقصية قطعاً.

(\*) إذا كانت  $u_{n+1} - u_n = 0$  فإن  $(U_n)$  ثابتة.

(II) المتتالية الحسابية

(1) تعريف:

نقول إن المتتالية  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  حسابية إذا وفقط وجد عدد حقيقي  $r$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_{n+1} = U_n + r$$

$r$  يسمى أساس المتتالية.

ملاحظات:

(a) تكون المتتالية  $(U_n)$  حسابية إذا وفقط إذا كان فرق حدين متتابعين ثابت. وتكون هذه الثابتة هي الأساس.

(b) لكي نبين أن  $(U_n)$  حسابية نقوم بحساب  $u_{n+1} - u_n$

ونجد  $u_{n+1} - u_n = r$  وتكون الثابتة هي الأساس.

## (2) الحد العام:

لتكن  $(u_n)$  متتالية هندسية أساسها  $q$  وحدها الأول  $u_0$

$$\text{لدينا } (\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n = u_0 \cdot q^n$$

### ملاحظة:

(1) إذا كان الحد الأول هو  $u_1$  فإن الحد العام هو  $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$

(2) بصفة عامة: إذا كان  $u_p$  حدين من متتالية هندسية

$$\text{أساسها } q \text{ فإن } u_n = u_p \cdot q^{n-p}$$

( ترتيب  $p$  غير مهم )

## (3) مجموع حدود متتالية لمتتالية هندسية:

لتكن  $(U_n)$  متتالية هندسية أساسها  $q$  وحدها الأول  $U_0$ .

مع  $(q \neq 1)$ .

$$S = U_0 + U_1 + \dots + U_n = U_0 \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$u_0$ : الحد الأول للمجموع  $S$ .

$(n+1)$ : عدد حدود المجموع  $S$ .

### ملاحظة:

(1) إذا كان  $q = 1$  فإن  $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n = (n+1)u_0$

$$(2) \quad q \neq 1 \quad u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = u_0 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

بصفة عامة

$$u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = u_p \cdot \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$$