

الأهداف القدرات المنتظرة من الدرس :

مذكرة رقم 5 في درس المتتاليات:

محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
- المتتاليات العددية؛ - المتتالية الترجعية؛ - المتتاليات المكبورة، المتتاليات المصغورة، - المتتاليات المحدودة، - رتابة متتالية، - المتتاليات الحسابية، - المتتاليات الهندسية.	- توظيف الاستدلال بالترجع؛ - التمكن من دراسة متتالية (إكبار، إصغار، رتابة)؛ - التعرف على متتالية حسابية أو هندسية وتحديد أساسها وحدها الأول؛ - حساب مجموع n حدا متتابة من متتالية حسابية أو متتالية هندسية. - التعرف على وضعيات لمتتاليات حسابية أو هندسية؛ - استعمال المتتاليات الحسابية والمتتاليات الهندسية في حل مسائل.	- يمكن تقديم مفهوم المتتاليات الترجعية من خلال وضعيات مستقاة من مختلف المواد؛ - يشكل درس المتتاليات فرصة لتعويد التلاميذ على استعمال الأدوات المعلوماتية؛ - ينبغي استغلال هذه المناسبة لتوظيف الاستدلال بالترجع؛ - ينبغي تناول المتتاليات الترجعية دون مغالاة.

I. عموميات حول المتتاليات العددية:

نشاط: لاحظ ثم أتمم بأربعة أعداد ملائمة لتسلسل كل متتالية من المتتاليات التالية :

$$(1) 0, 2, 4, 6, 8, 10, \dots$$

$$(2) 6, 3, 0, -3, -6, -9, -12, \dots$$

$$(3) 1, 3, 9, 27, 81, 243, \dots$$

$$(4) 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots$$

$$(5) 1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots$$

ليكن I هو $\mathbb{N}$ أو جزء من $\mathbb{N}$

مثال 1 : نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بالصيغة

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2n + 3$$

1. أحسب حدها الأول u_0

2. أحسب الحدود الأربعة الأولى للمتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$

$$\text{الجواب : } u_0 = 2 \times 0 + 3 = 3 \text{ و } u_1 = 2 \times 1 + 3 = 5$$

$$u_2 = 2 \times 2 + 3 = 4 + 3 = 7 \text{ و } u_3 = 2 \times 3 + 3 = 9$$

نلاحظ أن فرق حدين متتالين هو العدد 2

مثال 2: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بالعلاقة الترجعية

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3 \end{cases}$$

أحسب الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n)

الجواب : نعوض n ب 0

$$\text{فنجد : } u_{0+1} = 2 \times u_0 + 3 = 2 \times 1 + 3 = 2 + 3 = 5$$

$$\text{اذن : } u_1 = 5$$

نعوض n ب 1

$$\text{فنجد : } u_{1+1} = 2 \times u_1 + 3 = 2 \times 5 + 3 = 10 + 3 = 13$$

نعوض n ب 2

$$\text{فنجد : } u_{2+1} = 2 \times u_2 + 3 = 2 \times 13 + 3 = 26 + 3 = 29$$

$$\text{اذن : } u_3 = 29$$

ملاحظة : هذه المتتالية تسمى متتالية ترجعية

II. المتتاليات المكبورة و المصغورة و المحدودة

نشاط 1: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة

$$\text{كالتالي: } \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{n+1}{2n+1}$$

$$1. \text{ بين أن: } \forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{2} < u_n \leq 1$$

2. ماذا يمكن أن نقول عن المتتالية (u_n) ؟

الأجابة : (أ) نبين أن: $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq 1$ ؟؟؟؟

$$\text{نحسب الفرق : } 1 - u_n = 1 - \frac{n+1}{2n+1} = \frac{(2n+1) - (n+1)}{2n+1} = \frac{n}{2n+1} \geq 0$$

$$\text{ومنه : } \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq 1$$

$$(أ) \text{ نبين أن: } \forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{2} < u_n$$

نحسب الفرق :

$$u_n - \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2n+1} - \frac{1}{2} = \frac{2(n+1) - (2n+1)}{2(2n+1)} = \frac{1}{2n+1} > 0$$

$$\text{ومنه : } \forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{2} < u_n$$

$$\text{وبالتالي من 1 و 2 نجد: } \forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{2} < u_n \leq 1$$

(2) نقول المتتالية العددية (u_n) مكبورة بالعدد الحقيقي 1

و نقول المتتالية العددية (u_n) مصغورة بالعدد الحقيقي $\frac{1}{2}$

و نقول ان المتتالية العددية (u_n) محدودة

تعريف: لتكن $(u_n)_{n \in I}$ متتالية عددية

▪ نقول إن $(u_n)_{n \in I}$ مكبورة إذا وجد عدد حقيقي M بحيث $u_n \leq M$

$$\forall n \in I$$

▪ نقول إن $(u_n)_{n \in I}$ مصغورة إذا وجد عدد حقيقي m بحيث $u_n \geq m$

$$\forall n \in I$$

▪ نقول إن $(u_n)_{n \in I}$ محدودة إذا كانت مكبورة مصغورة .

تمرين 1: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} u_{n+1} = u_n^2 + 2u_n + 2 \\ u_0 = -1 \end{cases}$$

(1) أحسب u_1 بين أن المتتالية (u_n) مصغورة بالعدد 1

الجواب :

$$u_{0+1} = u_0^2 + 2u_0 + 2 = (-1)^2 + 2 \times (-1) + 2 = 1 + -2 + 2 = 1$$

(1) يكفي أن نبين أن: $\forall n \in \mathbb{N} \quad 1 \leq u_n$ ؟؟؟؟

نحسب الفرق :

$$u_n - 1 = u_n^2 + 2u_n + 2 - 1 = u_n^2 + 2u_n + 1 = (u_n + 1)^2 \geq 0$$

ومنه : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 1 \leq u_n$ وبالتالي : (u_n) مصغورة بالعدد 1

III. رتابة متتالية :

نشاط : نعتبر المتتاليتين العدديتين $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n \geq 1}$ المعرفتين

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n = \frac{2}{n} \quad \text{و} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2n + 3$$

أحسب الحدود الأربعة الأولى للمتتاليتين $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n \geq 1}$ ماذا تلاحظ؟

خاصية: لتكن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية عددية

▪ تكون المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تزايدية إذا وفقط إذا كان: $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \geq u_n$

▪ تكون المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تناقصية إذا وفقط إذا كان: $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \leq u_n$

▪ تكون المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ثابتة إذا وفقط إذا كان: $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n$

مثال 1 : أدرس رتابة المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة كالتالي :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2n + 3$$

الجواب : $u_{n+1} - u_n = 2(n+1) + 3 - (2n + 3) = 2 > 0$ إذن: (u_n)

تزايدية قطعاً

مثال 2: أدرس رتابة المتتالية (v_n) المعرفة كالتالي : $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \frac{2}{n}$

الجواب :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n} = \frac{2n - 2(n+1)}{n(n+1)} = \frac{-2}{n(n+1)} < 0$$

إذن: (v_n) تناقصية قطعاً

تمرين 2: أدرس رتابة المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{-n}{n+2}$$

$$u_{n+1} - u_n = \left(\frac{-(n+1)}{n+1+2} \right) - \left(\frac{-n}{n+2} \right) = \frac{-n-1}{n+3} + \frac{n}{n+2} = \frac{-2}{(n+3)(n+2)} < 0$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-n-1}{n+3} + \frac{n}{n+2} = \frac{(-n-1)(n+2) + n(n+3)}{(n+3)(n+2)} = \frac{-2}{(n+3)(n+2)} < 0$$

إذن $u_{n+1} \leq u_n$ وبالتالي (u_n) تناقصية قطعاً

تمرين 3: أدرس رتابة المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{5n-3}{2n+7} \quad \text{واستنتج أن : } \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq -\frac{3}{7}$$

الجواب :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{5(n+1)-3}{2(n+1)+7} - \frac{5n-3}{2n+7} = \frac{(5n+2)(2n+7) - (2n+9)(5n-3)}{(2n+9)(2n+7)}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{10n^2 + 35n + 4n + 14 - 10n^2 - 6n - 45n + 27}{(2n+9)(2n+7)} = \frac{41}{(2n+9)(2n+7)} \geq 0$$

إذن $u_{n+1} - u_n \geq 0$ وبالتالي (u_n)

بما أن (u_n) تزايدية فإن : $u_n \geq u_0$ يعني $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq -\frac{3}{7}$

تمرين 4: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} u_{n+1} = \frac{8(u_n-1)}{u_n+2} \\ u_0 = 3 \end{cases} \quad \text{كالتالي :}$$

1. بين أن المتتالية (u_n) مصغورة بالعدد 2

2. بين أن المتتالية (u_n) مكبورة بالعدد 4

3. ماذا تستنتج ؟

4. أدرس رتابة المتتالية (u_n)

(الأجوبة : 1) : © يكفي أن نبين أن: $\forall n \in \mathbb{N} \quad 2 \leq u_n$ ؟؟؟؟

نستعمل برهانا بالترجع

© نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $u_0 = 3 \geq 2$ إذن : العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

ب) نفترض أن: $u_n \geq 2$

© نبين أن: $u_{n+1} \geq 2$ ؟؟؟؟

$$\text{نحسب الفرق : } u_{n+1} - 2 = \frac{8(u_n-1)}{u_n+2} - 2 = \frac{8(u_n-1) - 2(u_n+2)}{u_n+2} = \frac{6u_n-12}{u_n+2}$$

$$u_{n+1} - 2 = \frac{6(u_n-2)}{u_n+2} \quad \text{و حسب افتراض التراجع لدينا : } u_n \geq 2$$

إذن : $u_{n+1} - 2 \geq 0$ و $u_n + 2 > 0$ و منه $u_{n+1} - 2 \geq 0$

وبالتالي: $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq 2$

(2) يكفي أن نبين أن: $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq 4$ ؟؟؟؟

نستعمل برهانا بالترجع

© نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $u_0 = 3 \leq 4$ إذن : العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

© نفترض أن: $u_n \leq 4$

© نبين أن: $u_{n+1} \leq 4$ ؟؟؟؟

$$\text{نحسب الفرق : } 4 - u_{n+1} = 4 - \frac{8(u_n-1)}{u_n+2} = \frac{4(u_n+2) - 8(u_n-1)}{u_n+2} = \frac{-4u_n+16}{u_n+2}$$

$$4 - u_{n+1} = \frac{4(4-u_n)}{u_n+2} \quad \text{و حسب افتراض التراجع لدينا : } u_n \leq 4$$

إذن : $4 - u_{n+1} \geq 0$ و $u_n + 2 > 0$ و منه $4 - u_{n+1} \geq 0$

وبالتالي: $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq 4$

(2) المتتالية العددية (u_n) محدودة لأنها مكبورة ومصغورة

$$(3) \quad u_{n+1} - u_n = \frac{8(u_n-1)}{u_n+2} - u_n = \frac{8(u_n-1) - u_n(u_n+2)}{u_n+2} = \frac{-u_n^2 + 6u_n - 8}{u_n+2}$$

نعمل $-u_n^2 + 6u_n - 8$ نحسب المميز Δ

$$\Delta = 36 - 32 = 4 > 0 \quad \text{هناك جذرين : } x_1 = \frac{-6+2}{-2} = 2 \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{-6-2}{-2} = 4$$

ومنه التعميل : $-u_n^2 + 6u_n - 8 = -(u_n-2)(u_n-4)$

$$\text{ومنه : } u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n-2)(u_n-4)}{u_n+2}$$

لدينا : $u_n \geq 2$ و $u_n \geq 0$ و $u_n - 2 \geq 0$

ولدينا : $u_n \leq 4$ إذن : $u_n - 4 \leq 0$

ومنه : $u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n-2)(u_n-4)}{u_n+2} \geq 0$ وبالتالي (u_n) تزايدية

تمرين 5: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} u_{n+1} = \frac{4u_n-2}{u_n+1} \\ u_0 = 1 \end{cases} \quad \text{كالتالي :}$$

1. بين أن المتتالية (u_n) مصغورة بالعدد 1

2. بين أن المتتالية (u_n) مكبورة بالعدد 2

3. ماذا تستنتج ؟

4. أدرس رتبة المتتالية (u_n)

(الأجوبة : 1) $\odot$ يكفي ان نبين أن : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 1 \leq u_n$ ؟؟؟؟

نستعمل برهانا بالترجع

$\odot$ نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $u_0 = 1 \geq 1$ إذن : العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

(ب) نفترض أن : $u_n \geq 1$

$\odot$ نبين أن : $u_{n+1} \geq 1$ ؟؟؟؟

$$\text{نحسب الفرق : } u_{n+1} - 1 = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1} - 1 = \frac{4u_n - 2 - (u_n + 1)}{u_n + 1} = \frac{3u_n - 3}{u_n + 1}$$

$$u_n \geq 1 \text{ و } u_{n+1} - 1 = \frac{3(u_n - 1)}{u_n + 1}$$

إذن : $u_{n+1} - 1 \geq 0$ و $u_n + 1 > 0$ و منه $u_{n+1} - 1 \geq 0$

وبالتالي : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq 1$

(2) يكفي ان نبين أن : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq 2$ ؟؟؟؟

نستعمل برهانا بالترجع

$\odot$ نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $u_0 = 1 \leq 2$ إذن : العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

$\odot$ نفترض أن : $u_n \leq 2$

$\odot$ نبين أن : $u_{n+1} \leq 2$ ؟؟؟؟

$$\text{نحسب الفرق : } 2 - u_{n+1} = 2 - \frac{4u_n - 2}{u_n + 1} = \frac{2(u_n + 1) - (4u_n - 2)}{u_n + 1} = \frac{-2u_n + 4}{u_n + 1}$$

$$u_n \leq 2 \text{ و } 2 - u_{n+1} = \frac{2(2 - u_n)}{u_n + 1}$$

إذن : $2 - u_{n+1} \geq 0$ و $u_n + 1 > 0$ و منه $2 - u_{n+1} \geq 0$

وبالتالي : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq 2$

(3) المتتالية العددية (u_n) محدودة لأنها مكبورة ومصغورة

$$(4) \quad u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1} - u_n = \frac{4u_n - 2 - u_n(u_n + 1)}{u_n + 1} = \frac{-u_n^2 + 3u_n - 2}{u_n + 2}$$

$$\text{نعمل } \Delta = -u_n^2 + 3u_n - 2 \text{ نحسب المميز } \Delta$$

$$\Delta = 9 - 8 = 1 > 0 \text{ هناك جذرين : } x_1 = \frac{-3+1}{-2} = 1 \text{ و } x_2 = \frac{-3-1}{-2} = 2$$

$$\text{ومنه التعميل : } -u_n^2 + 3u_n - 2 = -(u_n - 1)(u_n - 2)$$

$$\text{ومنه : } u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n - 1)(u_n - 2)}{u_n + 1}$$

لدينا : $u_n \geq 1$ إذن : $u_n - 1 \geq 0$ و $u_n \geq 0$

ولدينا : $u_n \leq 2$ إذن : $u_n - 2 \leq 0$

$$\text{ومنه : } u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n - 1)(u_n - 2)}{u_n + 1} \geq 0 \text{ وبالتالي } (u_n) \text{ تزايدية}$$

IV. المتتاليات الحسابية :

نشاط : نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بالصيغة الصريحة التالية :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2n - 1$$

1. أحسب حدها الأول u_0

2. أحسب الحدود الأربعة الأولى للمتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$

$$3. \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n \text{ أحسب}$$

$$\text{الجواب : } u_0 = 2 \times 0 - 1 = 0 - 1 = -1$$

$$u_1 = 2 \times 1 - 1 = 2 - 1 = 1$$

$$u_2 = 2 \times 2 - 1 = 4 - 1 = 3$$

$$u_3 = 2 \times 3 - 1 = 6 - 1 = 5$$

نلاحظ أن أن فرق حدين متتالين هو العدد 2

$$u_{n+1} - u_n = (2(n+1) - 1) - (2n - 1) = (2n + 2 - 1) - (2n - 1)$$

$$= (2n + 2 - 1) - (2n - 1) = (2n + 1) - (2n - 1) = 2n + 1 - 2n + 1 = 2$$

$$u_{n+1} - u_n = 2 = r$$

ومنه المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ هي حسابية أساسها : $r = 2$

1. تعريف :

نقول إن $(u_n)_{n \in \mathbb{I}}$ متتالية حسابية إذا وجد عدد حقيقي r بحيث

$$\forall n \geq n_0 \quad u_{n+1} = u_n + r$$

العدد الحقيقي r يسمى أساس المتتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$

تمرين 6 : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{n+3}{4}$$

بين أن المتتالية (u_n) حسابية وحدد أساسها وحدها الأول

$$\text{الجواب : } r = \frac{(n+1)+3}{4} - \frac{n+3}{4} = \frac{1}{4}$$

ومنه المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{I}}$ هي حسابية أساسها $r = \frac{1}{4}$

$$\text{وحدها الأول : } u_0 = \frac{3}{4}$$

2. صيغة الحد العام للمتتالية بدلالة n :

إذا كانت (u_n) متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول u_0

$$\text{فان : } u_n = u_0 + nr$$

نتيجة : إذا كانت $(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية حسابية أساسها r

فان : $u_n = u_p + (n - p)r$ لكل $n \geq n_0$ و $p \geq n_0$

تمرين 7 : لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r = \frac{1}{2}$ و $u_6 = 31$

(1) أحسب u_0 (2) أكتب u_n بدلالة n (3) أحسب : u_{2015} ثم u_{2016}

أجوبة : (1) لدينا (u_n) حسابية إذن : $u_n = u_0 + nr$

$$\text{ومنه : } u_6 = u_0 + 6 \times \frac{1}{2} \text{ يعني } 31 = u_0 + 3 \text{ يعني } 28 = u_0$$

$$(2) \quad u_n = u_0 + nr \text{ يعني } u_n = 28 + \frac{n}{2}$$

$$(3) \quad u_{2015} = 28 + \frac{2015}{2} = \frac{2071}{2}$$

$$\text{و } u_{2016} = 28 + \frac{2016}{2} = 28 + 1008 = 1036$$

تمرين 8 : لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها r و بحيث $u_0 = 5$

$$\text{و } u_{100} = -45$$

(1) حدد r (2) أحسب : u_{2015} و u_{2016}

أجوبة : (1) لدينا (u_n) حسابية إذن : $u_n = u_0 + nr$

$$\text{ومنه : } u_{100} = u_0 + 100r \text{ يعني } -45 = 5 + 100r \text{ يعني } -50 = 100r \text{ يعني } r = -\frac{1}{2}$$

(ج) نبين أن : $u_{n+1} = \frac{-3(n+1)+2}{3(n+1)+1}$ أي نبين أن :

$$u_{n+1} = \frac{-3n+1}{3n+4}$$

لدينا : $u_{n+1} = \frac{-1}{2+u_n}$ وحسب افتراض التراجع لدينا :

$$u_n = \frac{-3n+2}{3n+1}$$

$$u_{n+1} = \frac{-1}{2+u_n} = \frac{-1}{2+\frac{-3n+2}{3n+1}} = \frac{-1}{\frac{2(3n+1)+(-3n+2)}{3n+1}} = \frac{-1}{\frac{3n+4}{3n+1}} = -\frac{3n+1}{3n+4}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{-3n+2}{3n+1} \quad \text{ومنه :}$$

(4) بما أن : (v_n) متتالية حسابية أساسها : $r=1$ وحدها الأول :

$$v_0 = \frac{1}{3}$$

$$\text{فان : } v_n = v_0 + nr \quad \text{أي : } v_n = \frac{1}{3} + n$$

$$(5) \text{نعلم أن : } v_n = \frac{1}{u_n+1} \text{ يعني } u_n+1 = \frac{1}{v_n} \text{ يعني } u_n = \frac{1}{v_n} - 1$$

$$\text{ونعلم أن : } v_n = \frac{1}{3} + n \quad \text{اذن :}$$

$$u_n = \frac{1}{\frac{1}{3}+n} - 1 = \frac{1}{\frac{3n+1}{3}} - 1 = \frac{3}{3n+1} - 1 = \frac{3-3n-1}{3n+1} = \frac{-3n-2}{3n+1}$$

تمرين 10: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{3 + u_n} \\ u_0 = 0 \end{cases}$$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $v_n = \frac{1}{1+u_n}$

$$\forall n \in \mathbb{N}$$

1. أحسب $v_{n+1} - v_n$ واستنتج طبيعة المتتالية (v_n)

2. أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

$$\text{أجوبة: (1) } v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}+1} - \frac{1}{u_n+1} \quad \text{نعوض } u_{n+1} \text{ بـ } \frac{u_n-1}{3+u_n}$$

فنجد:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\frac{u_n-1}{3+u_n}+1} - \frac{1}{u_n+1} = \frac{1}{\frac{2u_n+2}{3+u_n}} - \frac{1}{u_n+1} = \frac{u_n+3}{2u_n+2} - \frac{2}{2u_n+2}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n+3-2}{2u_n+2} = \frac{u_n+1}{2(u_n+1)} = \frac{1}{2} = r$$

ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها : $r = \frac{1}{2}$ وحدها الأول : $v_0 = 1$

(2) بما أن : (v_n) متتالية حسابية أساسها : $r = \frac{1}{2}$ وحدها الأول :

$$v_0 = 1$$

$$\text{فان : } v_n = v_0 + nr \quad \text{أي : } v_n = 1 + \frac{n}{2}$$

$$\text{نعلم أن : } v_n = \frac{1}{u_n+1} \text{ يعني } u_n+1 = \frac{1}{v_n} \text{ يعني } u_n = \frac{1}{v_n} - 1$$

$$\text{ونعلم أن : } v_n = 1 + \frac{n}{2} \quad \text{اذن :}$$

(2) (u_n) حسابية اذن : $u_n = u_0 + nr$ يعني $u_{2015} = 5 + 2015 \times \left(-\frac{1}{2}\right)$

$$u_{2015} = \frac{10-2015}{2} = \frac{-2005}{2} \quad \text{يعني } u_{2015} = 5 - \frac{2015}{2}$$

$$u_{1008} = \frac{-2005}{2} + \frac{-1}{2} = \frac{-2006}{2} = -1003 \quad \text{ومنه}$$

تمرين 9: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} u_{n+1} = \frac{-1}{2+u_n} \\ u_0 = 2 \end{cases}$$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $v_n = \frac{1}{u_n+1}$

$$\forall n \in \mathbb{N}$$

1. أحسب u_1 و u_2 و v_0 و v_1

2. أحسب $v_{n+1} - v_n$ واستنتج طبيعة المتتالية (v_n)

3. بين بالتراجع أن : $u_n = \frac{-3n+2}{3n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

4. أكتب v_n بدلالة n

5. استنتج طريقة أخرى لكتابة u_n بدلالة n

$$\text{أجوبة: } u_{n+1} = \frac{-1}{2+u_n}$$

(1) نعوض $n=0$

$$u_1 = -\frac{1}{4} \quad \text{اذن : } u_{0+1} = \frac{-1}{2+u_0} = \frac{-1}{2+2} = \frac{-1}{4}$$

نعوض $n=1$ فنجد :

$$u_2 = -\frac{4}{7} \quad \text{اذن : } u_{1+1} = \frac{-1}{2+u_1} = \frac{-1}{2-\frac{1}{4}} = \frac{-1}{\frac{7}{4}} = \frac{-4}{7}$$

نعوض $n=0$ في $v_n = \frac{1}{u_n+1}$ فنجد :

$$v_0 = \frac{1}{u_0+1} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$$

$$\text{نعوض } n=1 \text{ فنجد : } v_1 = \frac{1}{u_1+1} = \frac{1}{-\frac{1}{4}+1} = \frac{3}{4}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}+1} - \frac{1}{u_n+1} \quad (2)$$

$$\text{نعوض } u_{n+1} \text{ بـ } \frac{-1}{2+u_n}$$

فنجد:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\frac{-1}{2+u_n}+1} - \frac{1}{u_n+1} = \frac{1}{\frac{u_n+1}{2+u_n}} - \frac{1}{u_n+1} = \frac{u_n+2}{2u_n+2} - \frac{1}{u_n+1}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n+2-1}{u_n+1} = \frac{u_n+1}{u_n+1} = 1$$

ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها : $r=1$ وحدها الأول : $v_0 = \frac{1}{3}$

$$(3) \text{أ) لدينا : } u_0 = 2 \quad \text{و} \quad \frac{-3 \times 0 + 2}{2 \times 0 + 1} = \frac{2}{1} = 2$$

اذن العبارة صحيحة بالنسبة لـ $n=0$

$$\text{ب) نفترض أن : } u_n = \frac{-3n+2}{3n+1}$$

$$u_n = \frac{1}{1+\frac{n}{2}} - 1 = \frac{1}{\frac{n+2}{2}} - 1 = \frac{2}{n+2} - 1 = \frac{2-n-2}{n+2} = \frac{-n}{n+2}$$

3. مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية :

لتكن $(u_n)_{n \in I}$ متتالية حسابية

نضع $S_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_n$ حيث $n > p \geq n_0$

$$\text{لدينا } S_n = (n-p+1) \left(\frac{u_n + u_p}{2} \right)$$

المجموع $S_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_n$

يحتوي على $(n-p+1)$ حد

ملاحظة :

■ إذا كانت (u_n) متتالية حسابية :

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = (n+1) \left(\frac{u_0 + u_n}{2} \right) \quad \text{فان}$$

■ إذا كانت (u_n) متتالية حسابية

$$\text{فان : } S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = n \left(\frac{u_1 + u_n}{2} \right)$$

مثال أو تمرين 11: لتكن المتتالية الحسابية $(u_n)_{n \geq 1}$ الذي

أساسها $r = 3$ وحدها الأول $u_0 = 5$

(1) أكتب u_n بدلالة n وأوجد الحد التاسع

(2) أحسب المجموع التالي : $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{13}$

أجوبة : (1) وبما أن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r = 3$ وحدها

الأول $u_0 = 5$

فان : $u_n = u_0 + (n-0)r$ أي : $u_n = 5 + 3(n-0)$ أي :

$$u_n = 3n + 5$$

ومنه : $u_8 = 3 \times 8 + 5 = 29$

$$(2) S = u_0 + u_1 + \dots + u_{13} = (13-0+1) \frac{u_0 + u_{13}}{2}$$

$$S = 14 \frac{u_0 + u_{13}}{2} = \frac{14}{2} (5 + u_{13})$$

$$u_{13} = 3 \times 13 + 5 = 44$$

$$\text{وبالتالي : } S = 7(5 + 44) = 7 \times 49 = 343$$

تمرين 12:

1. لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r = \frac{1}{2}$ وحدها الأول

$$u_0 = 1$$

أحسب المجموع التالي : $S_1 = u_3 + u_4 + u_5 + \dots + u_{30}$

2. لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r = -2$ وحدها الأول

$$u_0 = 4$$

أحسب المجموع التالي : $S_2 = u_7 + u_8 + u_9 + \dots + u_{25}$

$$\text{الجواب (1): } S_1 = u_3 + u_4 + u_5 + \dots + u_{30} = (30-3+1) \frac{u_3 + u_{30}}{2}$$

$$S_1 = (28) \frac{u_3 + u_{30}}{2}$$

وبما أن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r = \frac{1}{2}$ وحدها الأول

$$u_n = u_0 + (n-0)r$$

$$\text{أي : } u_n = 1 + \frac{n}{2} \quad \text{أي : } u_n = 1 + (n-0) \frac{1}{2}$$

$$\text{ومنه نحسب : } u_{30} = 1 + \frac{30}{2} = \frac{32}{2} = 16 \quad \text{و : } u_3 = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\text{وبالتالي : } S_1 = (28) \frac{u_3 + u_{30}}{2} = 14 \left(\frac{5}{2} + 16 \right) = 14 \left(\frac{37}{2} \right) = 7 \times 37 = 259$$

$$S_2 = u_7 + u_8 + u_9 + \dots + u_{25} = (25-7+1) \frac{u_7 + u_{25}}{2} = (19) \frac{u_7 + u_{25}}{2}$$

وبما أن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r = -2$ وحدها الأول

$$u_n = u_0 + (n-0)r$$

$$\text{أي : } u_n = 4 - 2n \quad \text{أي : } u_n = 4 + (n-0)(-2)$$

$$\text{نحسب : } u_7 = 4 - 2 \times 7 = 4 - 14 = -10$$

$$\text{و : } u_{25} = 4 - 2 \times 25 = 4 - 50 = -46$$

$$\text{وبالتالي : } S_2 = (19) \frac{u_7 + u_{25}}{2} = (19) \frac{-10 + (-46)}{2} = (19) \frac{-56}{2} = 19 \times -28 = -532$$

V. المتتاليات الهندسية:

نشاط 1: لاحظ ثم أتمم بأربعة أعداد ملائمة لتسلسل كل متتالية من المتتاليات التالية :

$$1. \quad 1, 3, 9, 27, 81, 243, \dots$$

$$2. \quad 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{32}, \dots$$

نشاط 2: نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بالصيغة الصريحة

$$\text{التالية : } \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2 \times 3^n$$

1. أحسب الحدود الأربعة الأولى للمتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$

$$2. \quad \text{أحسب } \frac{u_{n+1}}{u_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(الجواب : 1)

$$u_0 = 2 \times 3^0 = 2 \times 1 = 2 \quad \text{و} \quad u_1 = 2 \times 3^1 = 6 \quad \text{و} \quad u_2 = 2 \times 3^2 = 18 \quad \text{و}$$

$$u_3 = 2 \times 3^3 = 54$$

$$(2) \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2 \times 3^{n+1}}{2 \times 3^n} = \frac{3^{n+1}}{3^n} = \frac{3^n \times 3^1}{3^n} = 3^1 = 3 = q$$

نقول أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ هندسية أساسها $q = 3$ وحدها الأول

$$u_0 = 2$$

1. تعريف:

نقول إن $(u_n)_{n \in I}$ متتالية هندسية إذا وجد عدد حقيقي q

$$\text{بحيث : } \forall n \geq n_0 \quad u_{n+1} = q u_n$$

العدد الحقيقي q يسمى أساس المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$

تمرين 13: نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \geq 0}$ بحيث : $u_n = 5 \times 3^{2n+1}$

$$\forall n \in \mathbb{N}$$

بين أن $(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية هندسية و حدد أساسها q وحدها الأول

$$\text{الجواب : } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5 \times 3^{2n+3}}{5 \times 3^{2n+1}} = \frac{3^{2n+3}}{3^{2n+1}} = 3^{(2n+3)-(2n+1)} = 3^2 = 9 = q$$

اذن : المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ هندسية أساسها $q = 9$ وحدها الأول

$$u_0 = 15$$

2. صيغة الحد العام للمتتالية بدلالة n :

إذا كانت (u_n) متتالية هندسية أساسها q غير منعدم وحدها الأول u_{n_0} فان

$$u_n = u_{n_0} q^{n-n_0}$$

نتيجة : إذا كانت $(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية هندسية أساسها q غير منعدم فان

$$u_n = u_m q^{n-m} \quad \text{لكل } n \geq n_0 \text{ و } m \geq n_0$$

تمرين 14: لتكن (u_n) متتالية هندسية بحيث : $u_5 = \frac{243}{2}$ و $u_2 = \frac{9}{2}$

حدد q أساس المتتالية (u_n) و أكتب u_n بدلالة n

الجواب : لدينا (u_n) متتالية هندسية اذن : $u_n = u_m q^{n-m}$

ومنه : اذن : $u_5 = u_2 q^{5-2}$ يعني : $\frac{243}{2} = \frac{9}{2} q^3$

يعني $q^3 = \frac{243}{9} = 27$ يعني $q = 3$

لدينا أيضا : $u_n = u_2 q^{n-2}$ يعني :

$$u_n = \frac{9}{2} 3^{n-2} = \frac{3^2 \times 3^{n-2}}{2} = \frac{3^{n-2+2}}{2} = \frac{3^n}{2}$$

تمرين 15: نعتبر المتتالية الهندسية (u_n) بحيث حدها الأول

$u_0 = 81$ وأساسها : $q = \frac{1}{3}$

(1) أكتب u_n بدلالة n (2) أحسب u_1 و u_2 و u_3

(3) حدد العدد الصحيح الطبيعي n بحيث $u_n = 1$

(الأجوبة : (1) نعلم أن $(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية هندسية

أساسها $q = \frac{1}{3}$ وحدها الأول $u_0 = 81$

اذن : $u_n = u_0 q^{n-0}$ ومنه : $u_n = 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$

(2) $u_1 = 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{81}{3} = 27$ و $u_2 = 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{81}{9} = 9$

و $u_3 = 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{81}{27} = 3$

(3) $u_n = 1$ يعني $81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = 1$ يعني $81 \times \frac{1}{3^n} = 1$ يعني $\frac{81}{3^n} = 1$

يعني $81 = 3^n$ يعني $n = 4$

تمرين 16: نعتبر المتتالية الهندسية (u_n) بحيث حدها الأول

$u_0 = 5$

و $u_3 = 40$

1. تحقق أن أساس المتتالية (u_n) هو $q = 2$

2. أكتب u_n بدلالة n و أحسب u_4

3. حدد العدد الصحيح الطبيعي n بحيث $u_n = 160$

(الأجوبة : (1) نعلم أن $(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية هندسية اذن :

اذن : $u_3 = u_0 q^{3-0}$ يعني : $40 = 5q^3$ يعني : $q^3 = \frac{40}{5} = 8$ يعني :

$q^3 = 8$ يعني $q = 2$

(2) $u_n = 5 \times (2)^n$

و $u_2 = 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{81}{9} = 9$ و $u_1 = 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{81}{3} = 27$

$u_4 = 5 \times (2)^4 = 5 \times 16 = 80$

(3) $u_2 = 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{81}{9} = 9$ و $u_1 = 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{81}{3} = 27$

و $u_5 = 2 \times u_4 = 2 \times 80 = 160$ ومنه : $n = 5$

3. **مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية :**

لتكن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها q غير منعدم نضع

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

إذا كان $q \neq 1$ فان : $S_n = u_0 \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \right)$

مثال أو تمرين 17: نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة

بالصيغة التالية : $u_{n+1} = 3 \times u_n$ و $u_0 = 2$ $\forall n \in \mathbb{N}$

1. تحقق أن $(u_n)_{n \geq 0}$ هندسية

2. عبر عن U_n بدلالة n

3. أحسب المجموع : $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_5$

(الجواب : (1) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3 \times u_n}{u_n} = 3 = q$

اذن : المتتالية هندسية أساسها $q = 3$ وحدها الأول $u_0 = 3$

(2) $(u_n)_{n \geq 0}$ هندسية أساسها $q = 3$ وحدها الأول $u_0 = 3$

اذن : $u_n = u_0 q^{n-0} = 3 \times (3)^n = 3^{n+1}$ أي :

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_5 = u_1 \times \frac{1-q^{5+1}}{1-q} = u_1 \times \frac{1-q^6}{1-q}$$

$$u_1 = 3^{1+1} = 3^2 = 9$$

$$S_n = 9 \times \frac{1-3^6}{1-3} = 9 \times \frac{1-3^6}{-2} = 9 \times \frac{-242}{-2} = 1029$$

تمرين 18: لتكن (u_n) متتالية هندسية بحيث : $u_5 = 486$

و $u_7 = 4374$ و أساسها $q > 0$

(1) حدد أساس المتتالية (u_n) (2) أحسب u_0 و u_{10}

(3) أكتب u_n بدلالة n (4) أحسب المجموع التالي :

$$S = u_0 + u_5 + \dots + u_{2009}$$

(أجوبة : (1) (u_n) متتالية هندسية اذن :

$$q^2 = \frac{4374}{486} = 9$$
 يعني : $u_7 = u_5 q^{7-5}$

يعني : $q = 3$ أو $q = -3$ وحسب المعطيات : $q > 0$

اذن : $q = 3$

(2) (u_n) متتالية هندسية اذن : $u_5 = u_0 q^{5-0}$ يعني $486 = u_0 3^5$

$$u_0 = \frac{486}{3^5} = \frac{486}{243} = 2$$

$$u_{10} = u_7 q^{10-7} \text{ يعني } u_{10} = u_7 q^3$$

$$u_{10} = 4374 \times 3^3 = 4374 \times 27 = 118098$$

$$u_n = 2 \times 3^n \text{ يعني } u_n = u_0 q^{n-0} \text{ (3)}$$

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{2009} = u_0 \times \frac{1-q^{2009+1}}{1-q} = u_0 \times \frac{1-q^{2010}}{1-q}$$

$$S_n = 2 \times \frac{1-3^{2010}}{1-3} = -\frac{(1-3^{2010})}{2} = \frac{3^{2010}-1}{2}$$

تمرين 19: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \begin{cases} u_{n+1} = \frac{2}{3} u_n + 1 \\ u_0 = 10 \end{cases}$$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $v_n = u_n - 3$

$$\forall n \in \mathbb{N}$$

1. أحسب u_1 و u_2 و v_0 و v_1

2. بين أن : $u_n \geq 3$ $\forall n \in \mathbb{N}$

3. أدرس رتبة المتتالية (u_n)

تمرين 20: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{6}{1+u_n} \quad \text{ونعتبر المتتالية}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 3} \quad \text{المعرفة كالتالي :}$$

$$1. \text{ أحسب } u_1 \text{ و } v_0 \text{ و } v_1$$

$$2. \text{ بين أن } (v_n) \text{ متتالية هندسية وحدد أساسها } q \text{ وحدها الأول}$$

$$3. \text{ أكتب } v_n \text{ بدلالة } n \text{ واستنتج } u_n \text{ بدلالة } n$$

$$4. \text{ أحسب بدلالة } n \text{ المجموع : } S = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$$

$$\text{الجواب (1): نعوض } 0 \text{ فنجد : } u_1 = \frac{6}{1+u_0} = \frac{6}{1+3} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \quad \text{اذن :}$$

$$u_1 = \frac{3}{2}$$

$$v_1 = \frac{u_1 - 2}{u_1 + 3} = \frac{\frac{3}{2} - 2}{\frac{3}{2} + 3} = \frac{\frac{3-4}{2}}{\frac{3+6}{2}} = \frac{-1}{9} = -\frac{1}{9} \quad \text{و} \quad v_0 = \frac{u_0 - 2}{u_0 + 3} = \frac{3-2}{3+3} = \frac{1}{6}$$

(2)

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} + 3} = \frac{\frac{6}{1+u_n} - 2}{\frac{6}{1+u_n} + 3} = \frac{\frac{6-2(1+u_n)}{1+u_n}}{\frac{6+3(1+u_n)}{1+u_n}} = \frac{6-2-2u_n}{6+3+3u_n} = \frac{4-2u_n}{9+3u_n} = \frac{2(2-u_n)}{3(3+u_n)} = \frac{2(u_n-2)}{3(3+u_n)} = \frac{2}{3} \times \frac{u_n-2}{u_n+3} = \frac{2}{3} v_n$$

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} + 3} = \frac{-2(u_n-2)}{3(3+u_n)} = \frac{-2}{3} \times \frac{u_n-2}{u_n+3} = \left(-\frac{2}{3}\right) v_n$$

$$\text{اذن: المتتالية } (v_n) \text{ هندسية أساسها } q = -\frac{2}{3} \text{ وحدها الأول } v_0 = \frac{1}{6}$$

$$(3) \text{ بما أن المتتالية } (v_n) \text{ هندسية أساسها } q = -\frac{2}{3} \text{ وحدها الأول}$$

$$v_0 = \frac{1}{6}$$

$$\text{فان: } v_n = \frac{1}{6} \times \left(-\frac{2}{3}\right)^n \quad \text{استنتاج } u_n \text{ بدلالة } n :$$

$$\text{لدينا: } v_n u_n + 3v_n - u_n = -2 \Leftrightarrow v_n(u_n + 3) = u_n - 2 \Leftrightarrow v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 3}$$

$$u_n = \frac{2+3v_n}{1-v_n} \Leftrightarrow u_n = \frac{-2-3v_n}{v_n-1} \Leftrightarrow u_n(v_n-1) = -2-3v_n \Leftrightarrow$$

$$\text{ونعلم أن : } v_n = \frac{1}{6} \times \left(-\frac{2}{3}\right)^n \quad \text{اذن : } u_n = \frac{2+3 \times \frac{1}{6} \times \left(-\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{6} \times \left(-\frac{2}{3}\right)^n}$$

$$u_n = \frac{2 + \frac{1}{2} \times \left(-\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{6} \times \left(-\frac{2}{3}\right)^n}$$

$$S_n = v_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = v_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad (4)$$

$$S_n = \frac{1}{6} \times \frac{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{1}{6} \times \frac{3}{5} \left(1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) = \frac{1}{10} \left(1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$$

تمرين 21: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n} \\ u_1 = 1 \end{cases} \quad \text{ونعتبر المتتالية}$$

$$4. \text{ أحسب } \frac{v_{n+1}}{v_n} \text{ واستنتج طبيعة المتتالية } (v_n)$$

$$5. \text{ أكتب } v_n \text{ بدلالة } n$$

$$6. \text{ استنتج } u_n \text{ بدلالة } n$$

$$7. \text{ أحسب بدلالة } n \text{ المجموع : } S = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$$

$$\text{الجواب (1): نعوض } 0$$

$$\text{ف نجد : } u_1 = \frac{23}{3} \quad \text{اذن : } u_{0+1} = \frac{2}{3} \times u_0 + 1 = \frac{2}{3} \times 10 + 1 = \frac{20}{3} + 1 = \frac{20+3}{3} = \frac{23}{3}$$

$$\text{نعوض } n \text{ ب } 1$$

$$\text{ف نجد : } u_2 = \frac{55}{9} \quad \text{اذن : } u_{1+1} = \frac{2}{3} \times u_1 + 1 = \frac{2}{3} \times \frac{23}{3} + 1 = \frac{46}{9} + 1 = \frac{46+9}{9} = \frac{55}{9}$$

$$\text{نعوض } n \text{ ب } 0 \text{ فنجد : } v_0 = u_0 - 3 = 10 - 3 = 7$$

$$\text{نعوض } n \text{ ب } 1 \text{ فنجد : } v_1 = u_1 - 3 = \frac{23}{3} - 3 = \frac{23-9}{3} = \frac{14}{3}$$

$$(2) \text{ نستعمل برهانا بالترجع}$$

$$(أ) \text{ نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل } n=0$$

$$\text{لدينا } u_0 = 10 \geq 3 \quad \text{اذن : العبارة صحيحة بالنسبة ل } n=0$$

$$(ب) \text{ نفترض أن : } u_n \geq 3$$

$$(ج) \text{ نبين أن : } u_{n+1} \geq 3 \quad \text{؟؟؟؟}$$

$$\text{نحسب الفرق : } u_{n+1} - 3 = \frac{2}{3} u_n + 1 - 3 = \frac{2}{3} u_n - 2 = \frac{2}{3} (u_n - 3)$$

$$\text{و حسب افتراض التراجع لدينا : } u_n \geq 3$$

$$\text{اذن : } u_n - 3 \geq 0 \quad \text{منه } u_{n+1} - 3 \geq 0 \quad \text{وبالتالي : } \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq 3$$

$$(3) \text{ دراسة رتبة المتتالية } (u_n)$$

$$\text{نحسب : } u_{n+1} - u_n \text{ وندرس الإشارة :}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3} u_n + 1 - u_n = -\frac{1}{3} u_n + 1 = -\frac{1}{3} (u_n - 3)$$

$$\text{نعلم أن : } \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq 3 \quad \text{حسب السؤال (2) اذن : } u_{n+1} - u_n \leq 0$$

$$\text{ومنه المتتالية } (u_n) \text{ تناقصية}$$

(4)

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} - 3}{u_n - 3} = \frac{\frac{2}{3} u_n + 1 - 3}{u_n - 3} = \frac{\frac{2}{3} u_n - 2}{u_n - 3} = \frac{\frac{2}{3} u_n - \frac{6}{3}}{u_n - 3} = \frac{\frac{2}{3} (u_n - 3)}{u_n - 3} = \frac{2}{3} = q$$

$$\text{اذن: المتتالية } (v_n) \text{ هندسية أساسها } q = \frac{2}{3} \text{ وحدها الأول } v_0 = 7$$

$$(5) \text{ كتابة } v_n \text{ بدلالة } n$$

$$\text{بما أن المتتالية } (v_n) \text{ هندسية أساسها } q = \frac{2}{3} \text{ وحدها الأول}$$

$$v_0 = 7$$

$$\text{فان : } v_n = 7 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$(6) \text{ استنتاج } u_n \text{ بدلالة } n$$

$$\text{لدينا: } v_n = u_n - 3 \quad \text{اذن : } v_n + 3 = u_n \quad \text{أي : } u_n = 7 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + 3$$

$$(7) \quad S_n = v_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = v_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$S_n = 7 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} = 21 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$$

العديدية (v_n) المعرفة كالتالي : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n = \frac{1}{u_n}$

1. أحسب u_2 و v_1

2. بين أن (v_n) متتالية حسابية و حدد أساسها و حدها الأول

3. أكتب v_n بدلالة n واستنتج u_n بدلالة n

أجوبة : (1) $v_1 = \frac{1}{u_1} = \frac{1}{1} = 1$ و $u_2 = \frac{u_1}{1+u_1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1+u_n}{u_n} - \frac{1}{u_n} = \frac{1+u_n-1}{u_n} = \frac{u_n}{u_n} = 1 = r \quad (2)$$

ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها : $r = 1$ وحدها الأول : $v_1 = 1$

3) بما أن : (v_n) متتالية حسابية أساسها : $r = 1$ وحدها الأول :

$$v_1 = 1$$

فان : $v_n = v_1 + (n-1)r$ أي : $v_n = 1 + (n-1)$ يعني $v_n = n$

ونعلم أن : $v_n = \frac{1}{u_n}$ يعني $u_n = \frac{1}{v_n}$ ونعلم أن : $v_n = n$ اذن : $u_n = \frac{1}{n}$

تمرين 22: نعتبر المتتالية العديدية (u_n) المعرفة كالتالي :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n}{1+2u_n} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

العديدية (v_n) المعرفة كالتالي : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n = \frac{1}{u_n}$

1. أحسب u_1 و v_0

2. بين أن (v_n) متتالية حسابية و حدد أساسها و حدها الأول

3. أكتب v_n بدلالة n واستنتج u_n بدلالة n

أجوبة : (1) $v_0 = \frac{1}{u_0} = \frac{1}{1} = 1$ و $u_1 = \frac{u_0}{1+2u_0} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1+2u_n}{u_n} - \frac{1}{u_n} = \frac{1+2u_n-1}{u_n} = \frac{2u_n}{u_n} = 2 = r \quad (2)$$

ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها : $r = 2$ وحدها الأول : $v_0 = 1$

3) بما أن : (v_n) متتالية حسابية أساسها : $r = 2$ وحدها الأول :

$$v_0 = 1$$

فان : $v_n = v_0 + nr$ أي : $v_n = 1 + 2n$

ونعلم أن : $v_n = \frac{1}{u_n}$ يعني $u_n = \frac{1}{v_n}$ ونعلم أن : $v_n = 1 + 2n$ اذن :

$$u_n = \frac{1}{1+2n}$$

تمرين 23: نعتبر المتتالية العديدية (u_n) المعرفة كالتالي :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} u_{n+1} = \frac{5u_n - 4}{u_n + 1} \\ u_0 = 3 \end{cases}$$

ونعتبر المتتالية العديدية (v_n) المعرفة كالتالي : $v_n = \frac{1}{u_n - 2}$

$$\forall n \in \mathbb{N}$$

1. أحسب u_1 و v_0

2. بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq 2$

3. أحسب $v_{n+1} - v_n$ واستنتج طبيعة المتتالية (v_n)

4. أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

5. أدرس رتبة المتتالية (u_n)

6. أحسب المجموع التالي : $S_2 = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_{11}$

$$v_0 = \frac{1}{u_0 - 2} = \frac{1}{3 - 2} = 1 \quad \text{و} \quad u_1 = \frac{5u_0 - 4}{u_0 + 1} = \frac{15 - 4}{3 + 1} = \frac{11}{4}$$

(2) نستعمل برهانا بالترجع

(أ) نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n = 0$

لدينا $u_0 = 3 \geq 2$ اذن : العبارة صحيحة بالنسبة ل $n = 0$

(ب) نفترض أن : $u_n \geq 2$

(ج) نبين أن : $u_{n+1} \geq 2$ ؟؟؟؟؟

$$\text{نحسب الفرق : } u_{n+1} - 2 = \frac{5u_n - 4}{u_n + 1} - 2 = \frac{5u_n - 4 - 2(u_n + 1)}{u_n + 1} = \frac{3u_n - 6}{u_n + 1}$$

$$u_{n+1} - 2 = \frac{3(u_n - 2)}{u_n + 1} \quad \text{و حسب افتراض التراجع لدينا : } u_n \geq 2$$

$$\text{اذن : } u_{n+1} - 2 \geq 0 \quad \text{و} \quad u_n + 1 > 0 \quad \text{و} \quad u_n - 2 \geq 0$$

وبالتالي : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq 2$

$$(3) \quad v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1} - 2} - \frac{1}{u_n - 2} \quad \text{نعوض } u_{n+1} \text{ بـ } \frac{5u_n - 4}{u_n + 1}$$

$$\text{فنجد : } v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\frac{5u_n - 4}{u_n + 1} - 2} - \frac{1}{u_n - 2} = \frac{1}{\frac{5u_n - 4 - 2(u_n + 1)}{u_n + 1}} - \frac{1}{u_n - 2}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 1}{3u_n - 6} - \frac{1}{u_n - 2} = \frac{u_n + 1}{3(u_n - 2)} - \frac{1}{u_n - 2} = \frac{u_n + 1 - 3}{3(u_n - 2)} = \frac{u_n - 2}{3(u_n - 2)} = \frac{1}{3} = r$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 1 - 3}{3(u_n - 2)} = \frac{u_n - 2}{3(u_n - 2)} = \frac{1}{3} = r$$

ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها : $r = \frac{1}{3}$ وحدها الأول : $v_0 = 1$

(4) بما أن : (v_n) متتالية حسابية أساسها : $r = \frac{1}{3}$ وحدها الأول

$$v_0 = 1$$

فان : $v_n = v_0 + nr$ أي : $v_n = 1 + \frac{n}{3}$

نعلم أن : $v_n = \frac{1}{u_n - 2}$ يعني $u_n - 2 = \frac{1}{v_n}$ يعني $u_n = \frac{1}{v_n} + 2$

ونعلم أن : $v_n = 1 + \frac{n}{3}$ اذن :

$$u_n = \frac{1}{1 + \frac{n}{3}} + 2 = \frac{1}{\frac{n+3}{3}} + 2 = \frac{3}{n+3} + 2 = \frac{3+2n+6}{n+3} = \frac{9+2n}{n+3}$$

(5) دراسة رتبة المتتالية (u_n)

نحسب : $u_{n+1} - u_n$ وندرس الإشارة :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{5u_n - 4}{u_n + 1} - u_n = \frac{5u_n - 4 - u_n(u_n + 1)}{u_n + 1} = \frac{-u_n^2 + 4u_n - 4}{u_n + 1}$$

$$-(u_n - 2)^2 \leq 0 \quad \text{لأن : } u_{n+1} - u_n = -\frac{u_n^2 - 4u_n + 4}{u_n + 1} = -\frac{(u_n - 2)^2}{u_n + 1} \leq 0$$

و $u_n + 1 > 0$ (حسب السؤال 2) ومنه المتتالية (u_n) تناقصية

$$(6) \quad S = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_{11} = 11 \times \frac{(v_1 + v_{11})}{2}$$

$$\text{لدينا : } v_n = 1 + \frac{n}{3} \quad \text{اذن : } v_1 = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \quad \text{و} \quad v_2 = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

$$S = 11 \times \frac{\left(\frac{4}{3} + \frac{14}{3}\right)}{2} = 11 \times \frac{18}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{198}{2} = 99$$

تمرين 24: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$$\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = \frac{5u_n - 1}{u_n + 3} \\ u_0 = 2 \end{cases}$$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \frac{1}{u_n - 1}$

1. أحسب u_1 و v_0

2. بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq 1$

3. أحسب $v_{n+1} - v_n$ واستنتج طبيعة المتتالية (v_n)

4. أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

أجوبة (1): $u_1 = \frac{5u_0 - 1}{u_0 + 3} = \frac{10 - 1}{2 + 3} = \frac{9}{5}$ و $v_0 = \frac{1}{u_0 - 1} = \frac{1}{2 - 1} = 1$

(2) نستعمل برهانا بالترجع

(أ) نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $u_0 = 2 \geq 1$ إذن : العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

(ب) نفترض أن : $u_n \geq 1$

(ج) نبين أن : $u_{n+1} \geq 1$ ؟؟؟؟

نحسب الفرق : $u_{n+1} - 1 = \frac{5u_n - 1}{u_n + 3} - 1 = \frac{5u_n - 1 - (u_n + 3)}{u_n + 3} = \frac{4u_n - 4}{u_n + 3} = \frac{4(u_n - 1)}{u_n + 3}$

و حسب افتراض التراجع لدينا : $u_n \geq 1$

إذن : $u_{n+1} - 1 \geq 0$ و $u_n + 3 > 0$ و $u_n - 1 \geq 0$

وبالتالي : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq 1$

(3) $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1} - 1} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{u_n - 1}{3 + u_n} - \frac{1}{u_n - 1}$

فجدد :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\frac{5u_n - 1}{u_n + 3} - 1} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{1}{\frac{4u_n - 4}{u_n + 3}} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{u_n + 3}{4u_n - 4} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{u_n + 3 - 4}{4u_n - 4} = \frac{u_n - 1}{4(u_n - 1)} = \frac{1}{4} = r$$

ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها : $r = \frac{1}{4}$ وحدها الأول : $v_0 = 1$

(4) بما أن : (v_n) متتالية حسابية أساسها : $r = \frac{1}{4}$ وحدها الأول :

$$v_0 = 1$$

فان : $v_n = v_0 + nr$ أي : $v_n = 1 + \frac{n}{4}$

(5) نعلم أن : $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$ يعني $u_n - 1 = \frac{1}{v_n}$ يعني $u_n = \frac{1}{v_n} + 1$

ونعلم أن : $v_n = 1 + \frac{n}{4}$ إذن :

$$u_n = \frac{1}{1 + \frac{n}{4}} + 1 = \frac{1}{\frac{n+4}{4}} + 1 = \frac{4}{n+4} + 1 = \frac{4+n+4}{n+4} = \frac{n+8}{n+4}$$

تمرين 25: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$$\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = -1 - \frac{1}{4u_n} \\ u_0 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \frac{2}{2u_n + 1}$

1. أحسب u_1 و u_2 و u_3

2. بين أن : (v_n) متتالية حسابية

3. أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

أجوبة (1): $u_1 = -\frac{3}{2}$ و $u_2 = -\frac{5}{6}$ و $u_3 = -\frac{7}{10}$

(2) $v_{n+1} - v_n = -2$ نعوض u_{n+1} ب $\frac{u_n - 1}{3 + u_n}$

ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها : $r = -2$ وحدها الأول : $v_0 = 1$

(3) بما أن : (v_n) متتالية حسابية أساسها : $r = \frac{1}{4}$ وحدها الأول :

$$v_0 = 1$$

فان : $v_n = v_0 + nr$ أي : $v_n = -2n + 1$

نعلم أن : $v_n = \frac{2}{2u_n + 1}$ يعني $u_n = \frac{1}{v_n} - \frac{1}{2}$ يعني $u_n = \frac{1}{-2n+1} - \frac{1}{2}$

تمرين 26: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$$\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = \frac{5u_n}{2u_n + 3} \\ u_0 = 2 \end{cases}$$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$

$$\forall n \in \mathbb{N}$$

1. بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 1$

2. أبين أن (v_n) متتالية حسابية وحدد أساسها وحدها الأول

3. أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

أجوبة (1): نستعمل برهانا بالترجع

(أ) نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $u_0 = 2 > 1$ إذن : العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

(ب) نفترض أن : $u_n \geq 1$

(ج) نبين أن : $u_{n+1} \geq 1$ ؟؟؟؟

نحسب الفرق : $u_{n+1} - 1 = \frac{5u_n}{2u_n + 3} - 1 = \frac{5u_n - (2u_n + 3)}{2u_n + 3} = \frac{3u_n - 3}{2u_n + 3} = \frac{3(u_n - 1)}{2u_n + 3}$

و حسب افتراض التراجع لدينا : $u_n > 1$

إذن : $u_{n+1} - 1 \geq 0$ و $2u_n + 3 > 0$ و $u_n - 1 > 0$

وبالتالي : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq 1$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\frac{5u_n}{2u_n + 3} - 1} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{1}{\frac{3u_n - 3}{2u_n + 3}} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{2u_n + 3}{3u_n - 3} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{2u_n + 3 - 3}{3(u_n - 1)} = \frac{2u_n}{3(u_n - 1)} = \frac{u_n + 3}{4u_n - 4} - \frac{1}{4u_n - 4} = \frac{u_n - 1}{4(u_n - 1)} = \frac{1}{4} = r$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 3 - 4}{4u_n - 4} = \frac{u_n - 1}{4u_n - 4} = \frac{u_n - 1}{4(u_n - 1)} = \frac{1}{4} = r$$

ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها : $r = \frac{1}{4}$ وحدها الأول : $v_0 = 1$

(3) بما أن : (v_n) متتالية حسابية أساسها : $r = \frac{1}{4}$ وحدها الأول : $v_0 = 1$

فان : $v_n = v_0 + nr$ أي : $v_n = 1 + \frac{n}{4}$

نعلم أن : $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$ يعني $u_n - 1 = \frac{1}{v_n}$ يعني $u_n = \frac{1}{v_n} + 1$

ونعلم أن : $v_n = 1 + \frac{n}{4}$ إذن :

$$u_n = \frac{1}{1 + \frac{n}{4}} + 1 = \frac{1}{\frac{n+4}{4}} + 1 = \frac{4}{n+4} + 1 = \frac{4+n+4}{n+4} = \frac{n+8}{n+4}$$

تمرين 27: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$$\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = \frac{7u_n + 3}{3u_n + 7} \\ u_0 = \frac{7}{3} \end{cases}$$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$

1. بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq 1$

2. أدرس رتبة المتتالية (u_n)

3. أبين أن (v_n) متتالية هندسية وحدد أساسها وحدها الأول

4. أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

أجوبة (1) نستعمل برهانا بالترجع

(أ) نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $u_0 = \frac{7}{3} \geq 1$ إذن : العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

(ب) نفترض أن : $u_n \geq 1$

(ج) نبين أن : $u_{n+1} \geq 1$ ؟؟؟؟؟

$$\text{نحسب الفرق : } u_{n+1} - 1 = \frac{7u_n + 3}{3u_n + 7} - 1 = \frac{7u_n + 3 - (3u_n + 7)}{3u_n + 7} = \frac{4u_n - 4}{3u_n + 7} = \frac{4(u_n - 1)}{3u_n + 7}$$

و حسب افتراض التراجع لدينا : $u_n > 1$

إذن : $u_n - 1 > 0$ و $3u_n + 7 > 0$ ومنه $u_{n+1} - 1 \geq 0$

وبالتالي : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq 1$

(2) دراسة رتبة المتتالية (u_n) نحسب : $u_{n+1} - u_n$ وندرس الإشارة :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{7u_n + 3}{3u_n + 7} - u_n = \frac{7u_n + 3 - u_n(3u_n + 7)}{3u_n + 7} = \frac{-3u_n^2 + 3}{3u_n + 7}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-3(u_n + 1)(u_n - 1)}{3u_n + 7}$$

ولدينا : $u_n \geq 1$ إذن : $u_n - 1 \geq 0$ و $u_n + 1 \geq 0$ و $3u_n + 7 > 0$

ومنه : $u_{n+1} - u_n \leq 0$ وبالتالي : المتتالية (u_n) تناقصية

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1} = \frac{\frac{7u_n + 3}{3u_n + 7} - 1}{\frac{7u_n + 3}{3u_n + 7} + 1} = \frac{\frac{7u_n + 3 - (3u_n + 7)}{3u_n + 7}}{\frac{7u_n + 3 + (3u_n + 7)}{3u_n + 7}} = \frac{4u_n - 4}{10u_n + 10} = \frac{4u_n - 4}{10(u_n + 1)}$$

$$v_{n+1} = \frac{4(u_n - 1)}{10(u_n + 1)} = \frac{2}{5} \frac{u_n - 1}{u_n + 1} = \frac{2}{5} v_n$$

إذن : المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{2}{5}$

$$\text{وحدها الأول } v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 1} = \frac{\frac{7}{3} - 1}{\frac{7}{3} + 1} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{10}{3}} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

(4) بما أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{2}{5}$ وحدها الأول

$$v_0 = \frac{2}{5}$$

فان : $v_n = \frac{2}{5} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n = \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}$ **استنتاج** u_n بدلالة n :

$$\text{لدينا : } v_n u_n + v_n - u_n = -1 \Leftrightarrow v_n(u_n + 1) = u_n - 1 \Leftrightarrow v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$$

$$u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n} \Leftrightarrow u_n = \frac{1 - v_n}{v_n - 1} \Leftrightarrow u_n(v_n - 1) = -1 - v_n \Leftrightarrow$$

$$\text{ونعلم أن : } v_n = \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} \text{ إذن : } u_n = \frac{1 + \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}$$

تمرين 28: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$$\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = \frac{5u_n + 3}{u_n + 3} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \frac{u_n - 3}{u_n + 1}$

1. بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq u_n \leq 3$

2. أدرس رتبة المتتالية (u_n)

3. أبين أن (v_n) متتالية هندسية وحدد أساسها وحدها الأول

4. أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

أجوبة (1) نستعمل برهانا بالترجع

نبين أولا أن : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq u_n$

(أ) نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $u_0 = 1 \geq 0$ إذن : العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

(ب) نفترض أن : $u_n \geq 0$

(ج) نبين أن : $u_{n+1} \geq 0$ ؟؟؟؟؟

حسب افتراض التراجع لدينا : $u_n \geq 0$ إذن : $u_{n+1} \geq 0$

وبالتالي : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq 0$

نبين أن : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq 3$

(أ) نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $u_0 = 1 \leq 3$ إذن : العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

(ب) نفترض أن : $u_n \leq 3$

(ج) نبين أن : $u_{n+1} \leq 3$ ؟؟؟؟؟

نحسب الفرق

$$3 - u_{n+1} = 3 - \frac{5u_n + 3}{u_n + 3} = \frac{3(u_n + 3) - (5u_n + 3)}{u_n + 3} = \frac{-2u_n + 6}{u_n + 3} = \frac{-2(u_n - 3)}{u_n + 3}$$

و حسب افتراض التراجع لدينا : $u_n \leq 3$

إذن : $u_n - 3 \leq 0$ و $u_n + 3 > 0$ لأن $u_n \geq 0$ ومنه $3 - u_{n+1} \geq 0$

وبالتالي : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq 3$

(2) دراسة رتبة المتتالية (u_n) نحسب : $u_{n+1} - u_n$ وندرس الإشارة :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{5u_n + 3}{u_n + 3} - u_n = \frac{5u_n + 3 - u_n(u_n + 3)}{u_n + 3} = \frac{-u_n^2 + 2u_n + 3}{u_n + 3}$$

نعمل $\Delta = -u_n^2 + 2u_n + 3$ نحسب المميز

$$\Delta = 4 + 12 = 16 > 0 \text{ هناك جذرين : } x_1 = \frac{-2 + 4}{-2} = -1 \text{ و } x_2 = \frac{-2 - 4}{-2} = 3$$

ومنه التعميل : $-u_n^2 + 2u_n + 3 = -(u_n - 3)(u_n + 1)$

$$\text{ومنه : } u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n - 3)(u_n + 1)}{u_n + 3}$$

لدينا : $u_n \geq 0$ إذن : $u_n + 3 \geq 0$ و $u_n + 1 \geq 0$

ولدينا : $u_n \leq 3$ إذن : $u_n - 3 \leq 0$

ومنه : $u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n - 3)(u_n + 1)}{u_n + 3} \geq 0$ وبالتالي (u_n) تزايدية

$$v_n = (-1) \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n \text{ فان}$$

استنتاج u_n بدلالة n :

$$v_n u_n + v_n - u_n = -3 \Leftrightarrow v_n (u_n + 1) = u_n - 3 \Leftrightarrow v_n = \frac{u_n - 3}{u_n + 1}$$

$$u_n = \frac{3 + v_n}{1 - v_n} \Leftrightarrow u_n = \frac{-3 - v_n}{v_n - 1} \Leftrightarrow u_n (v_n - 1) = -3 - v_n \Leftrightarrow$$

$$\text{ونعلم أن : } v_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n \text{ إذن } u_n = \frac{3 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n}$$

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 3}{u_{n+1} + 1} = \frac{\frac{5u_n + 3}{u_n + 3} - 3}{\frac{5u_n + 3}{u_n + 3} + 1} = \frac{5u_n + 3 - 3(u_n + 3)}{5u_n + 3 + (u_n + 3)} = \frac{2u_n - 6}{6u_n + 6} = \frac{u_n - 3}{u_n + 3} \quad (3)$$

$$v_{n+1} = \frac{2(u_n - 3)}{6(u_n + 1)} = \frac{1}{3} \frac{u_n - 3}{u_n + 1} = \frac{1}{3} v_n$$

اذن: المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$

$$\text{وحدها الأول } v_0 = \frac{u_0 - 3}{u_0 + 1} = \frac{1 - 3}{1 + 1} = -1$$

(4) بما أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ وحدها الأول

$$v_0 = -1$$