



مبادئ في المنطق

مذكرة القواعد

كتابة عبارة رياضية باستعمال الكميات $\forall$ و $\exists$ و $\exists!$

أمثلة

- العبارة: « مهما يكن العدد الحقيقي x فإن $x^2 \geq 0$ »
تكتب رياضيا: $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geq 0$
- العبارة: « يوجد على الأقل عدد حقيقي a يحقق $2a^2 - 6 = -a$ »
تكتب رياضيا: $\exists a \in \mathbb{R} \quad 2a^2 - 6 = -a$
- العبارة: « يوجد عدد حقيقي موجب **وحيد** b يحقق $b^2 = 7$ »
تكتب رياضيا: $\exists! b \in \mathbb{R}^+ \quad b^2 = 7$

حقيقة عبارة رياضية

أمثلة

- العبارات الواردة في المثال السابق كلها صحيحة لأن:
- في المثال الأول مربع أي عدد حقيقي يكون دائما موجبا
 - في المثال الثاني المتساوية $2a^2 - 6 = -a$ تعني $2a^2 + a - 6 = 0$ محددة الحدودية:
 $2x^2 + x - 6 = 0$ هي: $\Delta = 1^2 + 4 \times 2 \times 6 = 1 + 48 = 49 > 0$ هذا يعني أن هذه المعادلة تقبل حلين حقيقيين مختلفين، إذن a يمكن أن يكون أحد هذين الحلين $(\frac{3}{2}$ أو -2).
 - في المثال الثالث المتساوية $b^2 = 7$ تعني $b = \sqrt{7}$ أو $b = -\sqrt{7}$ ، هذا يعني أن $\sqrt{7}$ هي القيمة الحقيقية الموجبة الوحيدة التي تحقق المتساوية.
 - العبارة: $\forall x \in \mathbb{R} \quad 2x + 1 \geq 0$ خاطئة لأنه مثلا $-8 \in \mathbb{R}$ لكن: $-8 \times 2 + 1 = -16 + 1 = -15 < 0$
 - العبارة: $\exists x \in \mathbb{Q} \quad x^2 = 3$ خاطئة لأن الأعداد التي مربعها 3 هي $\sqrt{3}$ و $-\sqrt{3}$ وكلاهما ليس بعدد جذري
 - العبارة: $\exists! y \in \mathbb{R} \quad 7 < y < 9$ خاطئة لأن $7 < 8 < 9$ و $8 \in \mathbb{R}$ ، $7 < 8,3 < 9$ و $8,3 \in \mathbb{R}$
 - العبارة: $\exists! y \in \mathbb{N} \quad 7 < y < 9$ صحيحة لأن العدد الصحيح الطبيعي الوحيد المحصور بين 7 و 9 هو 8.

العمليات على العبارات

أمثلة

- **نفي عبارة** P : هي العبارة التي تكون صحيحة عندما تكون P خاطئة و تكون خاطئة عندما تكون P صحيحة، ونرمز لها بـ $\bar{P}$ أو $\neg P$
- **عطف عبارتين** P و Q : هي العبارة التي تكون صحيحة فقط إذا كانت العبارتان P و Q صحيحتان معا، ونرمز لها بـ: $(P \text{ و } Q)$ أو أيضا $P \wedge Q$
- **فصل عبارتين** P و Q : هي العبارة التي تكون صحيحة إذا كانت إحدى العبارتان P أو Q صحيحة و تكون خاطئة إذا كانت العبارتان معا خاطئتان.
- **الاستلزام** $P \Rightarrow Q$: هي العبارة التي تكون صحيحة إذا كانت العبارتان P و Q صحيحتان معا أو كانت العبارة P خاطئة (سواء كانت Q صحيحة أم خاطئة)، بمعنى أنها ستكون خاطئة فقط إذا كانت العبارة P صحيحة و Q خاطئة.
(لا يمكن أن ننطلق من صواب و نصل إلى خطأ)
- **التكافؤ** $P \Leftrightarrow Q$: هي العبارة التي تكون صحيحة فقط إذا كانت العبارتان P و Q صحيحتان معا أو خاطئتان معا.

طرق الاستدلال

إذا تعذر علينا البرهان على صحة عبارة راضية بطريقة مباشرة وذلك مثلا لصعوبة استعمال المعطيات أو لسبب آخر فإن هناك طرقا رياضية تسمح بالبرهان على صحة أو خطأ هذه العبارة، من أهمها:

الاستدلال بالخلف

إذا أردنا أن نبرهن أن عبارة ما صحيحة نفترض أنها خاطئة و نحاول أن نجد تناقضا أو عبارة غير صحيحة.

مثال: a عدد صحيح طبيعي حيث $a^3 + a^2 + a$ عدد فردي، بين أن a عدد فردي

نفترض أن a عدد زوجي، إذن $a^3 = a \times a \times a$ زوجي و $a^2 = a \times a$ زوجي

منه $a^3 + a^2 + a$ زوجي (لأن مجموع عدة أعداد زوجية هو عدد زوجي)

وهذا يناقض المعطيات. إذن الافتراض خاطئ و بالتالي نفيه صحيح أي أن a عدد فردي

الاستدلال بفصل الحالات

إذا أردنا البرهان على صحة العبارة $Q \Rightarrow (P_1 \text{ أو } P_2 \text{ أو } P_3 \text{ أو } \dots)$ فإنه يمكننا عوضا عن ذلك أن

نبرهن على صحة كل العبارات $P_1 \Rightarrow Q$ و $P_2 \Rightarrow Q$ و $P_3 \Rightarrow Q$ و ...

مثال : بين أن: $\forall x > 0 \quad x + \frac{1}{\sqrt{x}} > 1$

بما أن $x > 0$ فإنه لدينا حالتان : $0 < x \leq 1$ أو $x > 1$

الحالة الأولى : إذا كان $x > 1$ فإن : $\frac{1}{\sqrt{x}} > 0$ نجمع المتفاوتتين فنجد : $x + \frac{1}{\sqrt{x}} > 1$

الحالة الثانية : إذا كان $0 < x \leq 1$ فإن : $\frac{1}{x} \geq 1$ منه $\frac{1}{\sqrt{x}} \geq 1$ ولدينا $x > 0$

نجمع فنجد : $x + \frac{1}{\sqrt{x}} > 1$ إذن في جميع الحالات : $x + \frac{1}{\sqrt{x}} > 1$

الاستدلال بالاسلزام المضاد للعكس

إذا أردنا البرهان على صحة العبارة $P \Rightarrow Q$

فإنه يمكننا عوضا عن ذلك أن نبرهن على صحة $\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$

مثال : بين أن: $x^2 > 4 \Rightarrow (x > 2 \text{ أو } x < -2)$

لنبين عوضا عن ذلك أن : $(x \leq 2 \text{ و } x \geq -2) \Rightarrow x^2 \leq 4$ أي $(-2 \leq x \leq 2) \Rightarrow x^2 \leq 4$

بالفعل : $x^2 > 4 \Rightarrow (x > 2 \text{ أو } x < -2)$ بالتالي ، $(-2 \leq x \leq 2) \Rightarrow |x| \leq 2 \Rightarrow |x|^2 \leq 4 \Rightarrow x^2 \leq 4$

الاستدلال بالترجع

إذا أردنا البرهان على صحة العبارة $\forall n \geq n_0 \quad P(n)$ (عبارة تحتوي على متغير صحيح طبيعي)

يمكن أن نبرهن على مايلي :

◆ عبارة صحيحة (أي العبارة صحيحة بالنسبة لأول قيمة n_0)

◆ نفترض صحة العبارة $P(n)$ ثم نبين صحة العبارة $P(n+1)$

مثال : بين أن: $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

بالنسبة لـ $n = 1$ لدينا : $\frac{1 \times (1+1)}{2} = 1$ إذن المتساوية صحيحة بالنسبة لأول قيمة

نفترض صحة العبارة $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ولنبين أن $1 + 2 + \dots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

لدينا : $1 + 2 + \dots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

و هذا ينهي البرهان