

مذكرة رقم 1 في درس المنطق 8 س

الأهداف القدرات المنتظرة من الدرس :

محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
- العبارات؛ العمليات على العبارات؛ الدوال العبارية؛ الكمات، - الاستدلالات الرياضية: الاستدلال بالخلف؛ الاستدلال بمضاد العكس؛ الاستدلال بفصل الحالات؛ الاستدلال بالتكافؤ؛ الاستدلال بالترجع.	- التمكن من استعمال الاستدلال المناسب حسب الوضعية المدروسة؛ - التمكن من صياغة براهين واستدلالات رياضية واضحة وسليمة منطقيا.	- ينبغي تقريب العبارات والقوانين المنطقية وطرائق الاستدلال انطلاقا من أنشطة متنوعة ومختلفة مستقاة من الرصيد المعرفي للتلميذ ومن وضعيات رياضية سبق له التعامل معها؛ - ينبغي تجنب البناء النظري والإفراط في استعمال جداول الحقيقة؛ - إن درس المنطق لا ينتهي بانتهاء هذا الفصل بل ينبغي استثمار نتائجه، كلما سنحت الفرصة لذلك، بمختلف فصول المقرر اللاحقة.

نشاط:

1. أنقل الجدول التالي ثم ضع العلامة "x" في الخانة المناسبة .

صحيح	خاطئ
	x
x	
	x
x	
	x
x	
	x
x	
	x
x	

2. هل توجد من بين الجمل الواردة في الجدول أعلاه جمل صحيحة و خاطئة في آن واحد
الجواب : كل النصوص الرياضية إما صحيحة و إما خاطئة وتسمى عبارات

I. العبارات والعمليات على العبارات

1.1. العبارات

نسمى عبارة كل نص رياضي يحمل معنى يكون إما صحيحا و إما خاطئا
نرمز عادة لعبارة بأحد الرموز p أو q أو r
غالبا ما نعبر عن حقيقة عبارة بجدول يسمى جدول حقيقة عبارة :

p
1
0

الرمز 1 يعني أن العبارة p صحيحة
و الرمز 0 يعني أن العبارة p خاطئة

1.2. العمليات على العبارات

1.2.1. نفي عبارة

نعتبر العبارة : " 3 عدد زوجي " p

ما قيمة حقيقة العبارة $\bar{p}$ حدد نفي العبارة p نرمز لها ب $\bar{p}$

ما قيمة حقيقة العبارة $\bar{p}$ إذن نفي عبارة p هو كل عبارة تكون

صحيحة إذا كانت p خاطئة و تكون خاطئة إذا كانت p صحيحة

نرمز لنفي العبارة p بالرمز $\bar{p}$ أو $\neg p$

p	$\bar{p}$
1	0
0	1

أمثلة:

حدد العبارة النافية و قيمة حقيقة كل عبارة من العبارات الآتية:

$$p \quad ((-2)^2 = 4)$$

$$q \quad \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$$

الأجوبة: p عبارة صحيحة : $((-2)^2 \neq 4)$: $\bar{p}$

q عبارة خاطئة : $(\sqrt{2} \notin \mathbb{Q})$: $\bar{q}$

p	q	p و q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

1.2.2. عطف عبارتين

عطف عبارتين p و q هو العبارة التي

نرمز لها بالرمز : p و q والتي تكون

صحيحة فقط إذا كانت العبارتان p و q

صححتين معا.

جدول حقيقة العطف المنطقي

أمثلة: حدد قيمة حقيقة العبارات الآتية :

" $((-2)^2 > 3)$ و " A " ($\sqrt{3} \geq 1$) " " B " $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ و " $\sqrt{3} + \sqrt{2} > 3$ " و " $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ و " B "

الأجوبة: A عبارة صحيحة : لأنها مكونة من عبارتين صححتين

A عبارة صحيحة : لأنها مكونة من عبارتين صححتين

B عبارة خاطئة : لأنها عطف عبارة صحيحة مع خاطئة

1.2.3. فصل عبارتين

فصل عبارتين p و q هو العبارة التي نرمز لها بالرمز : $(p$ أو $q)$

والتي تكون خاطئة فقط إذا كانت العبارتان p و q

خاطئتين معا.

أمثلة: حدد قيمة الحقيقة و العبارة النافية لكل عبارة من العبارات الآتية :

$$A \quad (\sqrt{4} = 2) \text{ أو } \left(\frac{1}{2} \in \mathbb{N}\right)$$

$$B \quad (3 \text{ عدد فردي أو } ((-2)^2 > 3))$$

$$C \quad (\pi = 3.14) \text{ و } (\sqrt{2} \leq 1)$$

الأجوبة: A عبارة صحيحة : لأن $(\sqrt{4} = 2)$ عبارة صحيحة

B عبارة صحيحة : لأنها فصل عبارتين صححتين

C عبارة خاطئة : لأنها فصل عبارتين خاطئتين

p	q	p أو q
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

من أجل $x = \frac{1}{2}$ نجد : $-\frac{1}{4} \geq 0$ ومنه نحصل على عبارة خاطئة

من أجل $x = -1$ نجد : $2 \geq 0$ ومنه نحصل على عبارة صحيحة
إذن التعبير : $(x \in \mathbb{R}); x^2 - x \geq 0$ يصبح صحيحا من أجل بعض قيم

x من $\mathbb{R}$ خاطئا من أجل بعض قيم x

نقول أننا أمام دالة عبارية تحتوي على متغير x ينتمي إلى المجموعة $\mathbb{R}$

نكتب : $\exists x \in \mathbb{R} / x^2 - x \geq 0$ ونقرأ يوجد x من $\mathbb{R}$ بحيث $x^2 - x \geq 0$

نشاط 2: نعتبر التعبير التالي : $(n \in \mathbb{N}); n^2 \geq 0$

• حدد قيمة حقيقة التعبير من أجل $n = 2$

• هل توجد قيم لـ n لا تحقق التعبير السابق؟

الأجوبة : من أجل $n = 2$ نحصل : على عبارة صحيحة

نلاحظ أننا نحصل على عبارة صحيحة مهما تكن قيمة المتغير n

نكتب : $\forall n \in \mathbb{N} / n^2 \geq 0$

1/ الدالة العبارية

نسمي دالة عبارية كل نص رياضي يحتوي على متغير (أو عدة متغيرات) ينتمي إلى مجموعة معلومة E حيث

تصبح عبارة كلما عوضنا المتغير بعنصر من E ونرمز عادة لدالة عبارية بالرمز أو $B(x)$ أو $A(x; y)$

2/ العبارات المكعبة

انطلاقا من الدالة العبارية $A(x)$ نكون العبارة " $\exists x \in E, A(x)$ " ونقرأ : " يوجد على الأقل x

من E يحقق الخاصية $A(x)$ " وتكون العبارة " $\exists x \in E, A(x)$

" صحيحة إذا وجد على الأقل x من E يحقق الخاصية $A(x)$

انطلاقا من الدالة العبارية $A(x)$ نكون العبارة " $\forall x \in E, A(x)$ "

ونقرأ : " مهما يكن x من E لدينا $A(x)$ "

وتكون العبارة " $\forall x \in E, A(x)$ " صحيحة إذا كانت جميع عناصر

E تحقق الخاصية $A(x)$.

تمرين 1: حدد قيمة حقيقة كل عبارة من العبارات الآتية :

1. " $\forall x \in \mathbb{R} / x^2 > 0$ "

2. " $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - 2 = 0$ "

3. " $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 = 0$ " عدد فردي $\Leftrightarrow 5$

4. " $(2 < \sqrt{3}) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} / \frac{n}{2} \in \mathbb{N}$ "

5. " $(\forall x \in \mathbb{R}); -1 \leq \cos x \leq 1$ "

6. " $(\forall n \in \mathbb{N}); (\exists m \in \mathbb{N}): n < m$ "

7. " $2n + 1$ عدد زوجي $(\exists n \in \mathbb{N})$ "

8. " $\sqrt{n} \in \mathbb{N}; (\forall n \in \mathbb{N})$ "

9. " $y - x > 0; (\forall x \in \mathbb{R}); (\exists y \in \mathbb{R})$ "

10. " $2x + 4 = 0; (\exists x \in \mathbb{R})$ "

11. " $x^2 = 2; (\exists x \in \mathbb{R})$ "

12. " $\frac{x}{4} \in \mathbb{Z}; (\exists x \in \mathbb{Z})$ "

13. " $y^2 = x; (\forall x \in \mathbb{R}); (\exists y \in \mathbb{R})$ "

الأجوبة: (1: خاطئة (2: صحيحة (3: خاطئة (4: خاطئة (5: صحيحة (6: صحيحة (7: خاطئة (8: خاطئة (9: صحيحة (10: صحيحة (11: خاطئة (12: صحيحة (13: خاطئة نأخذ $x = -1$

" $\left(\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}\right)$ و $(\sqrt{4} \neq 2)$ " $\overline{A}$

" $(3 \text{ عدد زوجي و } (-2)^2 \leq 3)$ " $\overline{B}$

" $(\pi \neq 3.14)$ أو $(\sqrt{2} > 1)$ " $\overline{C}$

1.2.4. استلزام عبارتين : استلزام عبارتين p و q هو العبارة التي نرمز

لها بالرمز : $(p \Rightarrow q)$ والتي تكون خاطئة فقط اذا كانت p صحيحة و

q خاطئة

ملاحظات

❖ العبارة : $(p \Rightarrow q)$ تقرأ : " p تستلزم q "

أو " اذا كانت p فان q "

❖ العبارة : $(q \Rightarrow p)$ تسمى الاستلزام العكسي

للاستلزام $(p \Rightarrow q)$

❖ للبرهان أن العبارة : $(p \Rightarrow q)$ صحيحة نفترض أن العبارة p صحيحة و نبين أن العبارة q صحيحة

مثال 1: حدد قيمة حقيقة كل عبارة من العبارات الآتية :

" $(0, 1 \in \mathbb{N}) \Rightarrow 2$ عدد فردي A "

" $n > 4 \Rightarrow n > 2$ " B

الأجوبة: عبارة A صحيحة و عبارة B صحيحة

نشاط: أتمم ملأ الجدول التالي :

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$ أو $\overline{p}$	$(p \Rightarrow q)$
1	1			
1	0			
0	1			
0	0			

نتيجة: العبارتان $(p \Rightarrow q)$ و q أو $\overline{p}$ متكافئتان

مثال 2: حدد نفي العبارة الآتية :

" $x = -3$ أو $x^2 = 9 \Rightarrow A$ "

1.2.5. **تكافؤ عبارتين**

تكافؤ عبارتين p و q هو العبارة التي نرمز لها بالرمز : $(p \Leftrightarrow q)$

والتي تكون صحيحة فقط إذا كانت العبارتان

p و q صحيحتين معا أو خاطئتين معا.

العبارة : $(p \Leftrightarrow q)$ تقرأ : " p تكافئ q "

أمثلة: حدد قيمة حقيقة كل عبارة من العبارات

الآتية :

" $(-2)^2 = 4 \Leftrightarrow (\sqrt{3} \geq 1)$ "

" $\sqrt{5} \geq 3 \Leftrightarrow -1 \in \mathbb{N}$ "

جدول حقيقة التكافؤ المنطقي

خاصية: العبارتان $(p \Leftrightarrow q)$ و $(q \Rightarrow p)$ و $(p \Rightarrow q)$ متكافئتان

II. الدالة العبارية و المكعبات.

نشاط 1: نعتبر التعبير التالي : $(x \in \mathbb{R}); x^2 - x \geq 0$

• حدد قيمة حقيقة التعبير من أجل $x = 2$

• حدد قيمة حقيقة التعبير من أجل $x = \frac{1}{2}$

• حدد قيمة حقيقة التعبير من أجل $x = -1$

الأجوبة : من أجل $x = 2$ نجد : $2 \geq 0$ ومنه نحصل على عبارة صحيحة

من أجل $x = \frac{1}{2}$ نجد : $-\frac{1}{4} \geq 0$ ومنه نحصل على عبارة خاطئة

اذن : p خاطئة

2. الاستدلال بالاستلزام المضاد للعكس

لكي نبرهن أن الاستلزام $(p \Rightarrow q)$ صحيح يكفي أن نبرهن أن الاستلزام المضاد للعكس $(\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$ صحيح

مثال 1: ليكن $x \in \mathbb{R}$ و $y \in \mathbb{R}$ بين أن: $\frac{1}{2} < \frac{1}{x} < \frac{1}{2} \Rightarrow x + y > 1$

الجواب: نستعمل الاستدلال بالاستلزام المضاد للعكس

اذن يكفي أن نبين أن: $x + y \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$ ؟؟؟؟

لدينا: $x \leq \frac{1}{2}$ و $y \leq \frac{1}{2}$ اذن: $x + y \leq 1$

ومنه: $x + y > 1 \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{x} < \frac{1}{2}$ وبالتالي $x \leq \frac{1}{2}$ و $y \leq \frac{1}{2} \Rightarrow x + y \leq 1$

تمرين 6: بين باستعمال الاستدلال بالاستلزام المضاد للعكس أنه: اذا كان:

$$y \in]1; +\infty[\text{ و } x \in]1; +\infty[$$

$$(x \neq y) \Rightarrow (x^2 - 2x \neq y^2 - 2y)$$

الجواب: نستعمل الاستدلال بالاستلزام المضاد للعكس

اذن يكفي أن نبين أن: $x^2 - 2x = y^2 - 2y \Rightarrow x = y$ ؟؟؟؟

$$x^2 - 2x = y^2 - 2y \Rightarrow x^2 - 2x - y^2 + 2y = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - y^2 - 2(x - y) = 0 \Rightarrow (x - y)(x + y) - 2(x - y) = 0$$

$$\Rightarrow (x - y)(x + y - 2) = 0 \Rightarrow x - y = 0 \text{ و } x + y - 2 = 0 \Rightarrow x = y \text{ و } x + y - 2 = 0$$

ونعلم أن: $x \in]1; +\infty[$ يعني $x > 1$ و: ونعلم أن: $x \in]1; +\infty[$ يعني $y > 1$

ومنه $x + y > 2$ يعني $x + y - 2 > 0$ ومنه $x + y - 2 \neq 0$

$$\text{ومنه: } x^2 - 2x = y^2 - 2y \Rightarrow x = y$$

وبالتالي: $(x \neq y) \Rightarrow (x^2 - 2x \neq y^2 - 2y)$

تمرين 7: ليكن: $x \in \mathbb{R}$ بين أن: $\frac{x+2}{x+5} \neq 2 \Rightarrow x \neq -8$

الجواب: نستعمل الاستدلال بالاستلزام المضاد للعكس

اذن يكفي أن نبين أن: $\frac{x+2}{x+5} = 2 \Rightarrow x = -8$ ؟؟؟؟

$$\frac{x+2}{x+5} = 2 \Rightarrow x+2 = 2(x+5)$$

$$x+2 = 2(x+5) \Rightarrow x+2 = 2x+10 \Rightarrow -x = 8 \Rightarrow x = -8$$

$$\text{ومنه: } \frac{x+2}{x+5} = 2 \Rightarrow x = -8$$

تمرين 8: $x \in]1; +\infty[$ و $y \in]2; +\infty[$

$$\text{بين أن: } (x \neq y) \Rightarrow (x^2 - 3x \neq y^2 - 3y)$$

الجواب: نستعمل الاستدلال بالاستلزام المضاد للعكس

اذن يكفي أن نبين أن: $x^2 - 3x = y^2 - 3y \Rightarrow x = y$ ؟؟؟؟

$$x^2 - 3x = y^2 - 3y \Rightarrow x^2 - 3x - y^2 + 3y = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - y^2 - 3(x - y) = 0 \Rightarrow (x - y)(x + y) - 3(x - y) = 0$$

$$\Rightarrow (x - y)(x + y - 3) = 0 \Rightarrow x - y = 0 \text{ و } x + y - 3 = 0 \Rightarrow x = y \text{ و } x + y - 3 = 0$$

ونعلم أن: $x \in]1; +\infty[$ يعني $x > 1$ و: ونعلم أن: $y \in]2; +\infty[$ يعني $y > 2$

ومنه $x + y > 3$ يعني $x + y - 3 > 0$ ومنه $x + y - 3 \neq 0$

$$\text{ومنه: } x^2 - 3x = y^2 - 3y \Rightarrow x = y$$

وبالتالي: $(x \neq y) \Rightarrow (x^2 - 3x \neq y^2 - 3y)$

3. الاستدلال بالتكافؤ:

يعتمد الاستدلال بالتكافؤ على القانون المنطقي التالي:

إذا كان: $(p \Leftrightarrow q)$ و $(q \Leftrightarrow r)$ فان: $(p \Leftrightarrow r)$

مثال: بين أن: $\forall (a; b) \in (\mathbb{R}^*)^2 \quad a + b \geq 2\sqrt{ab}$

خاصية: نفي العبارة " $\forall x \in E, A(x)$ " هو العبارة " $\exists x \in E, \bar{A}(x)$ "

نفي العبارة " $\exists x \in E, A(x)$ " هو العبارة " $\forall x \in E, \bar{A}(x)$ "

تمرين 2: حدد العبارة النافية للعبارة الآتية: (1) $(\forall n \in \mathbb{N}); 2^n > 5(n+1)$

$$(2) \quad " \exists x \in \mathbb{R}, x^2 - 2 = 0 \text{ و } -\frac{3}{2} \in \mathbb{Q} "$$

$$(3) \quad (\forall n \in \mathbb{N}); (\exists m \in \mathbb{N}): n < m$$

$$(5) \quad \text{توجد نافذة في المؤسسة مكسورة} (6) \quad (\forall n \in \mathbb{Z}): n \in \mathbb{Z} \Rightarrow n \geq 0$$

$$(1) \quad (\exists n \in \mathbb{N}): 2^n \leq 5(n+1)$$

$$(2) \quad (\forall x \in \mathbb{R}): x^2 - 2 \neq 0 \text{ و } -\frac{3}{2} \notin \mathbb{Q}$$

$$(3) \quad (\exists n \in \mathbb{N}); (\forall m \in \mathbb{N}): n \geq m$$

$$(5) \quad \text{كل نوافذ المؤسسة غير مكسورة} (6) \quad (\exists n \in \mathbb{Z}): n \in \mathbb{Z} \text{ و } n < 0$$

تمرين 3: حدد العبارة النافية للعبارة الآتية:

$$(1) \quad P; (\forall x \in \mathbb{R}): x \neq 2 \Rightarrow x^2 \neq 4$$

$$(2) \quad Q; (\exists x \in \mathbb{R}): x < 2 \Rightarrow x^2 \geq 2015$$

$$(1) \quad \bar{P}; (\exists x \in \mathbb{R}): x \neq 2 \text{ و } x^2 = 4$$

$$(2) \quad \bar{Q}; (\forall x \in \mathbb{R}): x < 2 \text{ و } x^2 < 2015$$

III. الاستدلالات الرياضية.

1. الاستدلال الاستنتاجي:

مثال: ليكن $x \in \mathbb{R}$ بين أن: $\frac{1}{3} < \frac{1}{x-1} < 1 \Rightarrow 2 < x < 4$

الأجوبة: نفترض أن: $2 < x < 4$ ونبين أن: $\frac{1}{3} < \frac{1}{x-1} < 1$

لدينا: $2 < x < 4$ اذن: $2-1 < x-1 < 4-1$

$$\text{اذن: } 1 < x-1 < 3 \text{ اذن: } \frac{1}{3} < \frac{1}{x-1} < 1$$

ومنه: $2 < x < 4 \Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{1}{x-1} < 1$

تمرين 4: ليكن $x \in \mathbb{R}$ بين أن: $\frac{11}{2} < \frac{-3x+5}{x+4} < \frac{1}{3} \Rightarrow -2 < x < \frac{1}{3}$

الأجوبة: نفترض أن: $-2 < x < \frac{1}{3}$ ونبين أن: $\frac{-3x+5}{x+4} < \frac{11}{2}$

$$\text{لدينا: } -2 < x < \frac{1}{3} \text{ اذن: } -2+4 < x+4 < \frac{1}{3}+4 \Rightarrow -2 < x+4 < \frac{13}{3}$$

$$\text{ولدينا: } -2 < x < \frac{1}{3} \text{ اذن: } -6 < 3x < 1 \text{ اذن: } -1 < -3x < 6$$

$$\text{اذن: } -4 < -3x+5 < 11$$

$$\text{ومنه: } \frac{-3x+5}{x+4} < \frac{11}{2} \text{ و } \frac{-3x+5}{x+4} < \frac{11}{2}$$

الاستدلال بالمثال المضاد:

مثال: بين العبارة التالية خاطئة مع تعليل الجواب:

$$P \quad (\forall x \in \mathbb{R}^*); x + \frac{1}{x} \geq 2$$

الجواب: نعتبر: $x = -2$ لدينا: $-2 + \frac{1}{-2} = -\frac{5}{2} < 2$ اذن: p خاطئة

تمرين 5: بين العبارة التالية خاطئة مع تعليل الجواب:

$$p \quad " \forall x \in]0; 1[\text{ و } \forall y \in]0; 1[, 0 < \frac{x+y}{xy(1-xy)} < 1 "$$

$$\text{الجواب: نعتبر: } x = \frac{1}{2} \text{ و } y = \frac{1}{2} \text{ لدينا: } \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{12}} = \frac{1}{\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{12}} = \frac{1}{\frac{1}{48}} = 48 > 1$$

الجواب : نستعمل الاستدلال بالتكافؤ :

$$a+b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab} \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{ab} \geq 0 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$$

وهذا صحيح لأن المربع دائما موجب

وبالتالي : $\forall (a;b) \in (\mathbb{R}^{**})^2 \quad a+b \geq 2\sqrt{ab}$

تمرين 9: بين أن : $\forall x > 0, x + \frac{1}{x} \geq 2$

الجواب : نستعمل الاستدلال بالتكافؤ :

$$\forall x > 0 \quad x + \frac{1}{x} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+1-2x}{x} \geq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{x^2-2x+1}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$$

والعبارة : $\frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$ صحيحة لأن : المربع موجب و $x > 0$

و بالتالي $\forall x > 0; x + \frac{1}{x} \geq 2$ صحيحة

4. الاستدلال بفصل الحالات :

مثال: باستعمال الاستدلال بفصل الحالات :

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $(E) : |3x-6|=1$

الجواب : ندرس اشارة : $3x-6$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$3x-6$	$-$	0	$+$

الحالة 1: اذا كانت : $x \geq 2$ فان : $3x-6 \geq 0$ ومنه : $(E) : |3x-6|=1$

$$x = \frac{7}{3} \in S \Leftrightarrow 3x = 7 \Leftrightarrow 3x-6=1 \Leftrightarrow$$

الحالة 2: اذا كانت : $x \leq 2$ فان : $3x-6 \leq 0$ ومنه : $(E) : |3x-6|=1$

$$x = \frac{5}{3} \in S \Leftrightarrow -3x = -5 \Leftrightarrow -3x+6=1 \Leftrightarrow -(3x-6)=1 \Leftrightarrow$$

ومنه مجموعة الحلول هي : $S = \left\{ \frac{5}{3}; \frac{7}{3} \right\}$

تمرين 10: باستعمال الاستدلال بفصل الحالات

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $3+2|x-4|=x+5$

الجواب : ندرس اشارة : $x-4$

الحالة 1: اذا كانت : $x \geq 4$ فان : $x-4 \geq 0$ ومنه : $|x-4|=x-4$

$$3+2|x-4|=x+5$$

$$3+2x-8=x+5 \Leftrightarrow$$

$$x=10 \in S \Leftrightarrow$$

الحالة 2: اذا كانت : $x \leq 4$ فان :

$$|x-4|=-x+4 \text{ ومنه : } x-4 \leq 0$$

$$x=2 \in S \Leftrightarrow 3-2x+8=x+5 \Leftrightarrow 3+2|x-4|=x+5$$

ومنه مجموعة الحلول هي : $S = \{2;10\}$

تمرين 11: باستعمال الاستدلال بفصل الحالات

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $(E) : x^2 - |x+1| + 1 = 0$

الجواب : ندرس اشارة : $x+1$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$

الحالة 1: اذا كانت : $x \geq -1$ فان : $x+1 \geq 0$

ومنه : $(E) : x^2 - |x+1| + 1 = 0$

$$x(x-1)=0 \Leftrightarrow x^2-x=0 \Leftrightarrow x^2-(x+1)+1=0 \Leftrightarrow$$

$$x=0 \in S \text{ و } x=1 \in S \Leftrightarrow$$

الحالة 2: اذا كانت : $x \leq -1$ فان : $x+1 \leq 0$

ومنه : $(E) : x^2 - |x+1| + 1 = 0$

$$x^2+x+2=0 \Leftrightarrow x^2+(x+1)+1=0 \Leftrightarrow$$

حل في $\mathbb{R}$ لأن : $\Delta = -7 < 0$

ومنه مجموعة الحلول هي : $S = \{0;1\}$

تمرين 12: باستعمال الاستدلال بفصل الحالات . بين أن : n^2+n

عدد زوجي $\forall n \in \mathbb{N}$

الجواب: الحالة 1: عدد زوجي n : $\exists k \in \mathbb{N} / n=2k$: ان

$$n^2+n=(2k)^2+2k=4k^2+2k=2(2k^2+k)=2k'$$

ومنه : n^2+n عدد زوجي

الحالة 2: عدد فردي n : $\exists k \in \mathbb{N} / n=2k+1$: ان

$$n^2+n=(2k+1)^2+2k+1=4k^2+4k+1+2k+1$$

$$n^2+n=4k^2+6k+2=2(2k^2+3k+1)=2k'$$

ومنه : n^2+n عدد زوجي

وبالتالي : n^2+n عدد زوجي $\forall n \in \mathbb{N}$

5. الاستدلال بالخلف :

لكي نبرهن أن عبارة صحيحة نفترض أن العبارة خاطئة ونحاول الحصول على تناقض مع المعطيات

مثال 1: بين باستعمال الاستدلال بالخلف أن : $\forall x \in \mathbb{R} / \frac{x^2-1}{x^2+1} \neq 1$

الجواب : نفترض أن : $\exists x \in \mathbb{R} / \frac{x^2-1}{x^2+1} = 1$

يعني $x^2-1=x^2+1$ يعني $-1=+1$ وهذا غير صحيح

ومنه ما افترضناه كان خاطئا أي : $\forall x \in \mathbb{R} / \frac{x^2-1}{x^2+1} \neq 1$

تمرين 13: $n \in \mathbb{N}$ بين أنه اذا كان n^2 عدد زوجي فان : n عدد زوجي

الجواب : نفترض أن : n عدد فردي أي أن : $\exists k \in \mathbb{N} / n=2k+1$

$$\text{ومنه : } n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=2(2k^2+2k)+1=2k'+1$$

أي : n^2 عدد فردي وهذا يتناقض مع المعطيات : n^2 عدد زوجي

ومنه ما افترضناه كان خاطئا أي : n عدد زوجي

6. الاستدلال بالترجع

لتكن $p(n)$ عبارة مرتبطة بعدد صحيح طبيعي n

لكي نبرهن أن العبارة $p(n)$ صحيحة

نمر بثلاث مراحل :

• نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

• نفترض أن العبارة صحيحة بالنسبة ل n

• نبين أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n+1$

مثال 1: بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن : $\forall n \in \mathbb{N}; 3^n \geq 1+2n$

الجواب : نمر بثلاث مراحل :

المرحلة 1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $3^0 \geq 1+2 \times 0$ أي : $1 \geq 1$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

المرحلة 2: نفترض أن : $3^n \geq 1+2n$ صحيحة

المرحلة 3: نبين أن : $3^{n+1} \geq 1+2(n+1)$ أي نبين أن : $3^{n+1} \geq 2n+3$ ؟؟

لدينا حسب افتراض الترجع :

$$3^n \times 3 \geq 3 \times (1+2n) \text{ ان : } 3^n \geq 1+2n$$

يعني : $3^{n+1} \geq 6n+3$ ان لم نجد بعد النتيجة

نلاحظ أن : $6n+3 \geq 2n+1$ (يمكن حساب الفرق)

$$(n+1)^3 + 2(n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2 =$$

$$(n^3 + 2n) + 3n^2 + 3n + 3 = 3k + 3(n^2 + n + 1) = 3(k + n^2 + n + 1)$$

$$k' = k + n^2 + n + 1 \text{ مع } 3(k + n^2 + n + 1) = 3k'$$

$$\exists k' \in \mathbb{N} / (n+1)^3 + 2(n+1) = 3k' \text{ ومنه :}$$

وبالتالي $n^3 + 2n$ يقبل القسمة على 3 مهما يكن العدد الصحيح الطبيعي n

تمرين 18: بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n \times (n+1) \times (2n+1)}{6}$$

الجواب : نمر بثلاث مراحل :

المرحلة 1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n = 1$

$$\text{لدينا } 1^2 = \frac{1 \times (1+1) \times (2+1)}{6} = \frac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1 \text{ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل } n = 1$$

المرحلة 2: نفترض أن: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n \times (n+1) \times (2n+1)}{6}$ صحيحة

المرحلة 3: نبين أن: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1) \times (n+2) \times (2n+3)}{6}$ ؟

$$\text{لدينا : } 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + (n+1)^2$$

$$\text{ولدينا حسب افتراض التراجع : } 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n \times (n+1) \times (2n+1)}{6}$$

$$\text{اذن : } 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = (n+1) \left(\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1) \right)$$

$$= (n+1) \left(\frac{n(2n+1) + 6(n+1)}{6} \right) = (n+1) \left(\frac{2n^2 + 7n + 6}{6} \right)$$

$$2n^2 + 7n + 6 = (n+2)(2n+3) \text{ : ويمكننا أن نلاحظ أن :}$$

$$\text{ومنه : } 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1) \times (n+2) \times (2n+3)}{6}$$

تمرين 19: بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

الجواب : نمر بثلاث مراحل :

المرحلة 1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n = 1$

$$\text{لدينا } 1^3 = \left(\frac{1(1+1)}{2} \right)^2 = 1 \text{ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل } n = 1$$

المرحلة 2: نفترض أن: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$ صحيحة

المرحلة 3: نبين أن: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{(n+1) \times (n+2)}{2} \right)^2$ ؟؟

$$\text{لدينا : } 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) + (n+1)^3$$

$$\text{ولدينا حسب افتراض التراجع : } 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

$$\text{اذن : } 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 + (n+1)^3$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = (n+1)^2 \left(\frac{n^2}{4} + (n+1) \right) = (n+1)^2 \left(\frac{n^2 + 4n + 4}{4} \right)$$

$$= (n+1)^2 \frac{(n+2)^2}{4} = (n+1)^2 \frac{(n+2)^2}{2^2} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right)^2$$

$$\text{ومنه : } \forall n \in \mathbb{N}^* : 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

تمرين 20: بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن :

$$\forall n \in \mathbb{N} : 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

$$(6n+3) - (2n+1) = 6n+3-2n-1 = 4n+2 \geq 0$$

لدينا اذن : $3^{n+1} \geq 6n+3$ و $6n+3 \geq 2n+1$ ومنه : $3^{n+1} \geq 2n+3$

تمرين 14: بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن : $\forall n \in \mathbb{N}; 3^n \geq 1+n$

الجواب : نمر بثلاث مراحل :

المرحلة 1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n = 0$

$$\text{لدينا } 3^0 \geq 1+0 \text{ أي : } 1 \geq 1 \text{ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل } n = 0$$

المرحلة 2: نفترض أن: $3^n \geq 1+n$ صحيحة

المرحلة 3: نبين أن: $3^{n+1} \geq 1+(n+1)$ أي نبين أن : $3^{n+1} \geq n+2$ ؟

$$\text{لدينا حسب افتراض التراجع : } 3^n \geq 1+n \text{ اذن : } 3^n \times 3 \geq 3 \times (1+n)$$

$$\text{يعني : } 3^{n+1} \geq 3n+3 \text{ اذن لم نجد بعد النتيجة}$$

$$\text{نلاحظ أن : } 3n+3 \geq n+2 \text{ (يمكن حساب الفرق)}$$

$$(3n+3) - (n+2) = 3n+3-n-2 = 2n+1 \geq 0$$

$$\text{لدينا اذن : } 3^{n+1} \geq 3n+3 \text{ و } 3n+3 \geq n+2 \text{ ومنه : } 3^{n+1} \geq n+2$$

تمرين 15: بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن : $\forall n \in \mathbb{N}; 2^n \geq 1+n$

الجواب : نمر بثلاث مراحل :

المرحلة 1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n = 0$

$$\text{لدينا } 2^0 \geq 1+0 \text{ أي : } 1 \geq 1 \text{ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل } n = 0$$

المرحلة 2: نفترض أن: $2^n \geq 1+n$ صحيحة

المرحلة 3: نبين أن: $2^{n+1} \geq 1+(n+1)$ أي نبين أن : $2^{n+1} \geq n+2$ ؟؟؟؟

$$\text{لدينا حسب افتراض التراجع : } 2^n \geq 1+n \text{ اذن : } 2^n \times 2 \geq 2 \times (1+n)$$

$$\text{يعني : } 2^{n+1} \geq 2n+2 \text{ اذن لم نجد بعد النتيجة}$$

$$\text{نلاحظ أن : } 2n+2 \geq n+2 \text{ (يمكن حساب الفرق)}$$

$$(2n+2) - (n+2) = n \geq 0$$

$$\text{لدينا اذن : } 2^{n+1} \geq 2n+2 \text{ و } 2n+2 \geq n+2 \text{ ومنه : } 2^{n+1} \geq n+2$$

تمرين 16: بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن : $1+2+3+\dots+n = \frac{n \times (n+1)}{2}$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*$$

الجواب : نمر بثلاث مراحل :

المرحلة 1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n = 1$

$$\text{لدينا } 1 = \frac{1 \times (1+1)}{2} = \frac{1 \times 2}{2} = 1 \text{ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل } n = 1$$

المرحلة 2: نفترض أن: $1+2+3+\dots+n = \frac{n \times (n+1)}{2}$ صحيحة

المرحلة 3: نبين أن: $1+2+3+\dots+n+(n+1) = \frac{(n+1) \times (n+2)}{2}$ ؟؟

$$\text{لدينا : } 1+2+3+\dots+n+(n+1) = (1+2+3+\dots+n) + (n+1)$$

$$\text{ولدينا حسب افتراض التراجع : } 1+2+3+\dots+n = \frac{n \times (n+1)}{2}$$

$$\text{اذن : } 1+2+3+\dots+n+(n+1) = \frac{n \times (n+1)}{2} + (n+1) = (n+1) \left(\frac{n}{2} + 1 \right)$$

$$1+2+3+\dots+n+(n+1) = (n+1) \left(\frac{n+2}{2} \right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\text{لدينا اذن : } 1+2+3+\dots+n+(n+1) = \frac{n \times (n+1)}{2} + (n+1) = (n+1) \left(\frac{n}{2} + 1 \right)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : 1+2+3+\dots+n = \frac{n \times (n+1)}{2}$$

تمرين 17: بين $n^3 + 2n$ يقبل القسمة على 3 مهما يكن العدد الصحيح الطبيعي n

$$\text{الجواب : يعني نبين : } \exists k \in \mathbb{N} / n^3 + 2n = 3k$$

نستعمل الاستدلال بالترجع ونمر بثلاث مراحل :

المرحلة 1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n = 0$

$$\text{لدينا } 0^3 + 2 \times 0 = 0 \text{ مضاعف للعدد 3 ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل } n = 0$$

المرحلة 2: نفترض أن: $\exists k \in \mathbb{N} / n^3 + 2n = 3k$ صحيحة

المرحلة 3: نبين أن: $\exists k' \in \mathbb{N} / (n+1)^3 + 2(n+1) = 3k'$ ؟؟؟؟؟

الجواب : نمر بثلاث مراحل :

المرحلة 1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة لـ $n = 0$

لدينا $2^0 = 1$ و $2^{0+1} - 1 = 1$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة لـ $n = 1$

المرحلة 2: نفترض أن: $2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ صحيحة

المرحلة 3: نبين أن: $2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n + 2^{n+1} = 2^{n+2} - 1$ صحيحة

لدينا $2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n + 2^{n+1} = (2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n) + 2^{n+1}$

ولدينا حسب افتراض التراجع : $2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

اذن : $2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} = 2 \times 2^{n+1} - 1 = 2^{n+2} - 1$

ومنه : $2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n + 2^{n+1} = 2^{n+2} - 1$

والتالي : $\forall n \in \mathbb{N} : 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

تمرين 21: بين باستعمال الاستدلال بالتراجع أن :

$$\forall n \in \mathbb{N} : 5^0 + 5^1 + 5^2 \dots + 5^n = \frac{5^{n+1} - 1}{4}$$

الجواب : نمر بثلاث مراحل :

المرحلة 1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة لـ $n = 0$

لدينا $5^0 = 1$ و $\frac{5^{0+1} - 1}{4} = 1$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة لـ $n = 0$

المرحلة 2: نفترض أن: $5^0 + 5^1 + 5^2 \dots + 5^n = \frac{5^{n+1} - 1}{4}$ صحيحة

المرحلة 3: نبين أن: $5^0 + 5^1 + 5^2 \dots + 5^n + 5^{n+1} = \frac{5^{n+2} - 1}{4}$

لدينا $5^0 + 5^1 + 5^2 + \dots + 5^n + 5^{n+1} = (5^0 + 5^1 + 5^2 + \dots + 5^n) + 5^{n+1}$

ولدينا حسب افتراض التراجع : $5^0 + 5^1 + 5^2 \dots + 5^n = \frac{5^{n+1} - 1}{4}$

اذن : $5^0 + 5^1 + 5^2 \dots + 5^n + 5^{n+1} = \frac{5^{n+1} - 1}{4} + 5^{n+1}$

$$= \frac{5^{n+1} - 1 + 4 \times 5^{n+1}}{4} = \frac{5 \times 5^{n+1} - 1}{4} = \frac{5^{n+2} - 1}{4}$$

ومنه : $5^0 + 5^1 + 5^2 \dots + 5^n + 5^{n+1} = \frac{5^{n+2} - 1}{4}$

والتالي : $\forall n \in \mathbb{N} : 5^0 + 5^1 + 5^2 \dots + 5^n = \frac{5^{n+1} - 1}{4}$

تمرين 1:1 بين أن: $\forall n \in \mathbb{N} : 3^0 + 3^1 + 3^2 \dots + 3^n = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$

(2) بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 12n + 14 \geq 6(n+1) + 7$

(ب) بين باستعمال الاستدلال بالتراجع أن : $2^n \geq 6n + 7 \quad \forall n \geq 6$

المرحلة 1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة لـ $n = 0$

لدينا $3^0 = 1$ و $\frac{3^{0+1} - 1}{2} = 1$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة لـ $n = 0$

المرحلة 2: نفترض أن: $3^0 + 3^1 + 3^2 \dots + 3^n = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$ صحيحة

المرحلة 3: نبين أن: $3^0 + 3^1 + 3^2 \dots + 3^n + 3^{n+1} = \frac{3^{n+2} - 1}{2}$

لدينا $3^0 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^n + 3^{n+1} = (3^0 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^n) + 3^{n+1}$

ولدينا حسب افتراض التراجع : $3^0 + 3^1 + 3^2 \dots + 3^n = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$

اذن : $3^0 + 3^1 + 3^2 \dots + 3^n + 3^{n+1} = \frac{3^{n+1} - 1}{2} + 3^{n+1}$

$$= \frac{3^{n+1} - 1 + 2 \times 3^{n+1}}{2} = \frac{3 \times 3^{n+1} - 1}{2} = \frac{3^{n+2} - 1}{2}$$

ومنه : $3^0 + 3^1 + 3^2 \dots + 3^n + 3^{n+1} = \frac{3^{n+2} - 1}{2}$

والتالي : $\forall n \in \mathbb{N} : 3^0 + 3^1 + 3^2 \dots + 3^n = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$

(2) نبين أن : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 12n + 14 \geq 6(n+1) + 7$

نحسب الفرق :

$$(12n + 14) - (6(n+1) + 7) = 2n + 14 - 6n - 6 - 7 = 6n + 1 \geq 0$$

ومنه : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 12n + 14 \geq 6(n+1) + 7$

(2) نبين أن : $2^n \geq 6n + 7 \quad \forall n \geq 6$

المرحلة 1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة لـ $n = 6$

لدينا $2^6 \geq 6 \times 6 + 7$ لأن : $64 \geq 43$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة لـ $n = 6$

المرحلة 2: نفترض أن: $2^n \geq 6n + 7$ صحيحة

المرحلة 3: نبين أن: $2^{n+1} \geq 6(n+1) + 7$

لدينا حسب افتراض التراجع : $2^n \geq 6n + 7$ اذن : $2 \times 2^n \geq 2 \times (6n + 7)$

يعني : $2^{n+1} \geq 12n + 14$ اذن لم نجد بعد النتيجة

وحسب السؤال (2) لدينا : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 12n + 14 \geq 6(n+1) + 7$

لدينا اذن : $2^{n+1} \geq 12n + 14$ و $2^{n+1} \geq 6(n+1) + 7$

ومنه : $2^{n+1} \geq 6(n+1) + 7$

وبالتالي : $\forall n \geq 6 \quad 2^n \geq 6n + 7$

تمرين 23: بين أنه مهما يكن n من $\mathbb{N}^*$.

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 5 + \dots + n \times (n+1) = \frac{1}{3} n \times (n+1) \times (n+2)$$

الجواب : نمر بثلاث مراحل :

المرحلة 1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة لـ $n = 1$

لدينا $1 \times (1+1) = 1 \times 2 = 2$ و $\frac{1}{3} \times 1 \times (1+1) \times (1+2) = \frac{1}{3} \times 2 \times 3 = 2$ ومنه العبارة

صحيحة بالنسبة لـ $n = 1$

المرحلة 2: نفترض أن: $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + n \times (n+1) = \frac{1}{3} n \times (n+1) \times (n+2)$

المرحلة 3: نبين أن :

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + n \times (n+1) + (n+1) \times (n+2) = \frac{1}{3} (n+1) \times (n+2) \times (n+3)$$

لدينا حسب افتراض التراجع : $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + n \times (n+1) = \frac{1}{3} n \times (n+1) \times (n+2)$

اذن : $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + n \times (n+1) + (n+1) \times (n+2) = \frac{1}{3} n \times (n+1) \times (n+2) + (n+1) \times (n+2)$

$$= \frac{1}{3} n \times (n+1) \times (n+2) + (n+1) \times (n+2) = (n+1) \times (n+2) \left(\frac{1}{3} n + 1 \right) = (n+1) \times (n+2) \left(\frac{n+3}{3} \right)$$

ومنه $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + n \times (n+1) + (n+1) \times (n+2) = \frac{1}{3} (n+1) \times (n+2) \times (n+3)$

تمرين 24: بين أنه مهما يكن n من $\mathbb{N}^*$.

$$\frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \frac{1}{3 \times 4 \times 5} + \dots + \frac{1}{n \times (n+1) \times (n+2)} = \frac{1}{4(n+1) \times (n+2)}$$

الجواب : نمر بثلاث مراحل :

المرحلة 1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة لـ $n = 1$

لدينا $\frac{1}{1 \times 2 \times 3} = \frac{1}{6}$ و $\frac{1}{4 \times 2 \times 3} = \frac{1}{24}$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة لـ $n = 1$

المرحلة 2: نفترض أن:

$$\frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \frac{1}{3 \times 4 \times 5} + \dots + \frac{1}{n \times (n+1) \times (n+2)} = \frac{1}{4(n+1) \times (n+2)}$$

المرحلة 3: نبين أن:

$$S = \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \frac{1}{3 \times 4 \times 5} + \dots + \frac{1}{n \times (n+1) \times (n+2)} + \frac{1}{(n+1) \times (n+2) \times (n+3)} = \frac{(n+1) \times (n+4)}{4(n+2) \times (n+3)}$$

لدينا حسب افتراض التراجع :

$$\frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \frac{1}{3 \times 4 \times 5} + \dots + \frac{1}{n \times (n+1) \times (n+2)} = \frac{1}{4(n+1) \times (n+2)}$$

اذن :

نعلم حسب (1) $11^{n+1} - 1 = 10 \times 11^n + 11^n - 1$
ولدينا حسب افتراض التراجع : $\exists k \in \mathbb{N} / 11^n - 1 = 10k$
اذن : $11^{n+1} - 1 = 10 \times 11^n + 10k$
اذن : $k' = 11^n + k$ مع $11^{n+1} - 1 = 10(11^n + k) = 10k'$

ومنه : $11^{n+1} - 1$ مضاعف للعدد 10
وبالتالي : $11^n - 1$ مضاعف للعدد 10

تمرين 28: نضع : $\forall n \in \mathbb{N}^* A_n = 3^{2n} - 2^n$

(1) تحقق من أن : $\forall n \in \mathbb{N}^* A_{n+1} = 2A_n + 7 \times 3^{2n}$

(2) بين باستعمال الاستدلال بالتراجع أن : A_n مضاعف للعدد 7

الجواب (1): $A_{n+1} = 3^{2(n+1)} - 2^{n+1} = 3^{2n+2} - 2^{n+1} = 3^{2n} \times 3^2 - 2^n \times 2^1 = 9 \times 3^{2n} - 2^n \times 2^1 = (7+2) \times 3^{2n} - 2^n \times 2^1 = 7 \times 3^{2n} + 2 \times 3^{2n} - 2^n \times 2^1$
 $A_{n+1} = 7 \times 3^{2n} + 2 \times 3^{2n} - 2^n \times 2^1 = 7 \times 3^{2n} + 2(3^{2n} - 2^n) = 7 \times 3^{2n} + 2A_n$

(2) يعني نبين : $\exists k \in \mathbb{N}^* / A_n = 7k$

المرحلة 1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n = 1$

لدينا $A_1 = 3^{2 \times 1} - 2^1 = 3^2 - 2 = 9 - 2 = 7$

مضاعف للعدد 7 ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n = 1$

المرحلة 2: نفترض أن : $\exists k \in \mathbb{N}^* / A_n = 7k$ صحيحة

المرحلة 3: نبين أن : $\exists k' \in \mathbb{N}^* / A_{n+1} = 7k'$ ؟؟؟؟

حسب السؤال (1) : $A_{n+1} = 7 \times 3^{2n} + 2 \times A_n$

اذن : $A_{n+1} = 7 \times 3^{2n} + 2 \times A_n = 7 \times 3^{2n} + 2 \times 7k = 7 \times (3^{2n} + 2k) = 7 \times k'$

وبالتالي : $\forall n \in \mathbb{N}^* A_n = 3^{2n} - 2^n$

تمرين 29: ليكن a عدد حقيقي موجب قطعاً

(1) بين باستعمال الاستدلال بالتراجع أن : $\forall n \in \mathbb{N}; (1+a)^n \geq 1+n \times a$

(2) استنتج أن : $\forall n \in \mathbb{N}; 2^n > n$

الجواب (1): نمر بثلاث مراحل :

المرحلة 1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n = 0$

لدينا $(1+a)^0 \geq 1+0 \times a$ لأن : $1 \geq 1$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n = 0$

المرحلة 2: نفترض أن : $(1+a)^n \geq 1+n \times a$ صحيحة

المرحلة 3: نبين أن : $(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1) \times a$ ؟؟؟؟؟

لدينا حسب افتراض التراجع : $(1+a)^n \geq 1+n \times a$

اذن : $(1+a)(1+a)^n \geq (1+a)(1+n \times a)$

يعني : $(1+a)^{n+1} \geq (1+a)(1+n \times a)$ اذن لم نجد بعد النتيجة

نقارن : $(1+a)(1+n \times a)$ و $1+(n+1) \times a$ (يمكن حساب الفرق)

$(1+a)(1+n \times a) - (1+(n+1) \times a) = 1+na+a+na^2 - 1-n \times a - a$

$(1+a)(1+n \times a) - (1+(n+1) \times a) = na^2 \geq 0$

اذن : $(1+a)(1+n \times a) \geq (1+(n+1) \times a)$

ومنه : $(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1) \times a$

وبالتالي : $\forall n \in \mathbb{N}; (1+a)^n \geq 1+n \times a$

(2) وجدنا : $\forall a > 0; \forall n \in \mathbb{N}; (1+a)^n \geq 1+n \times a$

نأخذ مثلاً : $a = 1$ فنجد : $\forall n \in \mathbb{N}; (1+1)^n \geq 1+n \times 1$

أي : $\forall n \in \mathbb{N}; 2^n \geq 1+n$

ولكن نعلم أن : $\forall n \in \mathbb{N}; 1+n > n$

اذن : $\forall n \in \mathbb{N}; 2^n > n$

$$\frac{n \times (n+3)}{4(n+1) \times (n+2)} + \frac{1}{(n+1) \times (n+2) \times (n+3)} = \frac{n \times (n+3)^2}{4(n+1) \times (n+2) \times (n+3)} + \frac{4}{4(n+1) \times (n+2) \times (n+3)}$$

$$= \frac{n \times (n+3)^2 + 4}{4(n+1) \times (n+2) \times (n+3)} = \frac{n \times (n^2 + 6n + 9) + 4}{4(n+1) \times (n+2) \times (n+3)} = \frac{n^3 + 6n^2 + 9n + 4}{4(n+1) \times (n+2) \times (n+3)}$$

يمكننا أن نبين أن : $n^3 + 6n^2 + 9n + 4 = (n+1)^2 \times (n+4)$

$$S = \frac{n^3 + 6n^2 + 9n + 4}{4(n+1) \times (n+2) \times (n+3)} = \frac{(n+1)^2 \times (n+4)}{4(n+1) \times (n+2) \times (n+3)} = \frac{(n+1) \times (n+4)}{4 \times (n+2) \times (n+3)}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n \times (n+1)} = \frac{n \times (n+3)}{4(n+1) \times (n+2)}$$

تمرين 25: بين أنه مهما يكن n من $\mathbb{N}$

$$b_n = 4^{2n+2} - 1 \text{ يقبل القسمة على } 15$$

الجواب : يعني نبين : $\exists k \in \mathbb{N} / b_n = 15k$

نستعمل الاستدلال بالتراجع و نمر بثلاث مراحل :

المرحلة 1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n = 0$

$$b_0 = 4^{2 \times 0 + 2} - 1 = 4^2 - 1 = 15$$

مضاعف للعدد 15 ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n = 0$

المرحلة 2: نفترض أن : $\exists k \in \mathbb{N} / 4^{2n+2} - 1 = 15k$ صحيحة

المرحلة 3: نبين أن : $\exists k' \in \mathbb{N} / 4^{2(n+1)+2} - 1 = 15k'$ ؟؟؟؟؟

أي نبين أن : $\exists k' \in \mathbb{N} / 4^{2n+4} - 1 = 15k'$ ؟؟؟؟؟

أي نبين أن : $\exists k' \in \mathbb{N} / b_{n+1} = 15k'$ ؟؟؟؟؟

$$b_{n+1} - b_n = (4^{2n+4} - 1) - (4^{2n+2} - 1)$$

$$b_{n+1} - b_n = 4^{2n+2+2} - 4^{2n+2} = 4^{2n+2} (4^2 - 1)$$

$$b_{n+1} - b_n = 15 \times 4^{2n+1}$$

$$b_{n+1} = 15 \times 4^{2n+1} + b_n \text{ يعني } b_{n+1} - b_n = 15 \times 4^{2n+1}$$

ولدينا حسب افتراض التراجع : $\exists k \in \mathbb{N} / b_n = 15k$

$$b_{n+1} = 15 \times (4^{2n+1} + k) \text{ أي } b_{n+1} = 15 \times 4^{2n+1} + 15k$$

وبالتالي $\exists k' \in \mathbb{N} / b_{n+1} = 15k'$

تمرين 26: بين أنه مهما يكن n من $\mathbb{N}$

$$n^3 - n \text{ يقبل القسمة على } 6$$

الجواب : يعني نبين : $\exists k \in \mathbb{N} / n^3 - n = 6k$

نستعمل الاستدلال بالتراجع و نمر بثلاث مراحل :

المرحلة 1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n = 0$

$$b_n = 0^3 - 0 = 0$$

لدينا $0^3 - 0 = 0$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n = 0$

المرحلة 2: نفترض أن : $\exists k \in \mathbb{N} / n^3 - n = 6k$ صحيحة

المرحلة 3: نبين أن : $\exists k' \in \mathbb{N} / (n+1)^3 - (n+1) = 6k'$ ؟؟؟؟؟

$$(n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 =$$

$$= (n^3 - n) + 3n^2 + 3n = 6k + 3(n^2 + n) = 6k + 3n(n+1)$$

ونعلم أن : $n(n+1) = 2m$ عدد زوجي لأنه جداء عددين متتاليين

$$(n+1)^3 - (n+1) = 6k + 3 \times 2m = 6k + 6m = 6(k+m) = 6k'$$

وبالتالي : $\exists k' \in \mathbb{N} / (n+1)^3 - (n+1) = 6k'$

تمرين 27: بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 11^{n+1} - 1 = 10 \times 11^n + 11^n - 1$

(2) بين باستعمال الاستدلال بالتراجع أن : $11^n - 1$ مضاعف للعدد 10

$$11^{n+1} - 1 = 11 \times 11^n - 1 = (10+1) \times 11^n - 1 = 10 \times 11^n + 11^n - 1$$

(2) يعني نبين : $\exists k \in \mathbb{N} / 11^n - 1 = 10k$

نستعمل الاستدلال بالتراجع و نمر بثلاث مراحل :

المرحلة 1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n = 0$

$$b_n = 11^0 - 1 = 1 - 1 = 0$$

لدينا $11^0 - 1 = 0$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n = 0$

المرحلة 2: نفترض أن : $\exists k \in \mathbb{N} / 11^n - 1 = 10k$ صحيحة

المرحلة 3: نبين أن : $\exists k' \in \mathbb{N} / 11^{n+1} - 1 = 10k'$ ؟؟؟؟؟