ثانوية الجاحظ التأهيلية نيابة زاكورة – بتزموط	تصحيح فرض محروس رقم 2 الدورة الاولى في مادة الرياضيات	السنة الدراسية:2012/2013
القسم : 1 علوم تجريبية 1		المدة التي انجزا فيها : ساعتان
		استاذ : عبد الفتاح قويدر

تمرين 1:

لتكن (U_n) المتتالية العددية المعرفة بمايلي : $\begin{cases} U_0 = 11 \\ U_{n+1} = \frac{10}{11}U_n + \frac{12}{11} \; ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) احسب U_1 و U_2:

$U_1 = \frac{122}{11}$ و $U_2 = \frac{1252}{121}$

2) تحقق من ان : $U_{n+1} - 12 = \frac{10}{11}(U_n - 12)$ لكل n من $\mathbb{N}$

$$U_{n+1} - 12 = \frac{10}{11}U_n + \frac{12}{11} - 12 = \frac{10}{11}U_n - \frac{120}{11} = \frac{10}{11}(U_n - 12)$$

وبالتالي $U_{n+1} - 12 = \frac{10}{11}(U_n - 12)$ لكل n من $\mathbb{N}$

3) أ- بين بالترجع ان $U_n < 12$ لكل n من $\mathbb{N}$

من اجل $n = 0$ لدينا $U_0 = 11$ و $11 \leq 12$ اذن $U_0 \leq 12$

نفترض ان : $U_n \leq 12$; $\forall n \in \mathbb{N}$ و نبين ان $U_{n+1} \leq 12$

لدينا $U_n \leq 12$ و اي ان $\frac{10}{11}U_n \leq \frac{120}{11}$ اي $\frac{10}{11}U_n + \frac{12}{11} \leq \frac{120}{11} + \frac{12}{11}$

وبالتالي $U_{n+1} \leq \frac{132}{11}$ ومنه $U_{n+1} \leq 12$

ومنه $U_n \leq 12$; $\forall n \in \mathbb{N}$

ب- بين ان (U_n) تزايدية قطعا

$$U_{n+1} - U_n = \frac{10}{11}U_n + \frac{12}{11} - U_n = \frac{-1}{11}U_n + \frac{12}{11} = \frac{1}{11}(12 - U_n) > 0$$

(لان $U_n \leq 12$; $\forall n \in \mathbb{N}$)

4) لتكن (V_n) المتتالية العددية بحيث $V_n = U_n - 12$ $\forall n \in \mathbb{N}$

أ- بين ان المتتالية (V_n) متتالية هندسية اساسها $\frac{10}{11}$

$$V_{n+1} = U_{n+1} - 12 = \frac{10}{11}(U_n - 12) = \frac{10}{11}V_n = qV_n$$

ومنه فان المتتالية (V_n) متتالية هندسية اساسها $\frac{10}{11}$

ب- اكتب (V_n) بدلالة n

لدينا $V_n = U_n - 12$ $\forall n \in \mathbb{N}$ وبالتالي $V_0 = U_0 - 12 = 11 - 12 = -1$

وبمأن المتتالية (V_n) متتالية هندسية اساسها $\frac{10}{11}$

فإن $V_n = V_0 q^n = -1 \times (4)^n = -(4)^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

ت- بين ان $U_n = 12 - (\frac{10}{11})^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\forall n \in \mathbb{N} \; V_n = U_n - 12 \Leftrightarrow U_n = V_n + 12 = 12 - (\frac{10}{11})^n$$

تمرين II: ليكن $ABCD$ متوازي الاضلاع وP و Q و R النقط المعرفة بمايلي :
$\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AR}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$ و $PQRA$ متوازي الاضلاع
نريد ان نبرهن على ان المستقيمات (CQ) و (DP) و (BR) متلاقية

1) أ) بين ان P مرجح A وB معينتين بمعاملين يتم تحديدهما

$$\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{AP}+2\overrightarrow{PB}$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AP}-2\overrightarrow{AP}-2\overrightarrow{PB}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}=\vec{0}$$

ومنه ان P مرجح $(A\,;1)$ و$(B\,;2)$

ب) بين ان R مرجح A وD معينتين بمعاملين يتم تحديدهما

$$\overrightarrow{AR}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{AR}=3\overrightarrow{AR}+3\overrightarrow{RD}$$

$$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{AR}-3\overrightarrow{AR}-3\overrightarrow{RD}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{RA}+3\overrightarrow{RD}=\vec{0}$$

ومنه ان R مرجح $(A\,;1)$ و$(D\,;3)$

2) لتكن I نقطة تقاطع (DP) و (BR) ولتكن G مرجح $(A\,,1)$ و$(B,2)$ و$(D,3)$
بين ان $I=G$ (*)
لدينا G مرجح $(A\,,1)$ و$(B,2)$ و$(D,3)$، حسب تجمعية المرجح ، لدينا :
G مرجح $(P,3)$ و$(D,3)$ اي $G\in(DP)$ وG مرجح $(B,2)$ و$(R,4)$ اي $G\in(BR)$
ومنه فإن G نقطة تقاطع (DP) و (BR) وبالتالي $I=G$

3) بين ان Q مرجح $(A\,,-5)$ و$(B,8)$ و$(D,9)$ (**)
لدينا $PQRA$ متوازي الاضلاع، اذن $\overrightarrow{QR}+\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{QA}$
يعني : $\overrightarrow{QR}+\overrightarrow{QP}-\overrightarrow{QA}=\vec{0}$ اي Q مرجح $(A\,,-1)$ و$(P,1)$ و$(R,1)$
وبمأن P مرجح $(A\,;\frac{1}{3})$ و$(B\,;\frac{2}{3})$ و R مرجح $(A\,;\frac{1}{4})$ و$(D\,;\frac{3}{4})$
فإن Q مرجح $(A\,,-1)$ و$(A\,;\frac{1}{3})$ و$(B\,;\frac{2}{3})$ و $(A\,;\frac{1}{4})$ و$(D\,;\frac{3}{4})$ وحسب خاصية الصمود بضرب المعاملات في 12 نحصل على :
Q مرجح $(A\,,-12)$ و$(A\,;4)$ و$(B\,;8)$ و $(A\,;3)$ و$(D\,;9)$
وبالتالي Q مرجح $(A\,,-5)$ و$(B,8)$ و$(D,9)$

تجمعية المرجح

4) استنتج ان Q منتصف $[CI]$
لدينا $ABCD$ متوازي الاضلاع،اذن $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}$ فإن $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CA}=\vec{0}$
ومنه C مرجح $(A\,,-1)$ و$(B,1)$ و$(D,1)$ اي C مرجح $(A\,,-6)$ و$(B,6)$ و$(D,6)$

خاصية الصمود

وبمان I مرجح $(A\,,1)$ و$(B,2)$ و$(D,3)$ و Q مرجح $(A\,,-5)$ و$(B,8)$ و$(D,9)$

فإن Q مرجح $\underbrace{(A\,,-6)\text{ و}(B\,;\,6)\text{ و}(D\,;6)}_{(C;6)}$ و $\underbrace{(A\,;1)\text{ و}(B;2)\text{ و}(D\,;3)}_{(I;6)}$

تجمعية المرجح

اي Q مرجح $(C\,,6)$ و$(I\,;6)$ وهذا يعني ان Q منتصف $[CI]$

5) استنتج ان المستقيمات (CQ) و (DP) و (BR) متلاقية
لدينا Q منتصف $[C]$ ومنه $I\in(CQ)$
ولدينا I نقطة تقاطع (DP) و (BR)
اذن المستقيمات (CQ) و (DP) و (BR) تتلاقى في النقطة I

تمرين III (*): لتكن (U_n) المتتالية العددية المعرفة بمايلي :

$$\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} = \sqrt{\frac{1+U_n}{2}} \text{ و } U_0 \in [0;1]$$

-1 بين أن: $\forall n \in \mathbb{N} ;\ U_n \in [0;1]$

من اجل n=0 لدينا $U_0 \in [0;1]$ ومنه الخاصية صحيحة من اجل n=0

نفترض $\forall n \in \mathbb{N} ;\ U_n \in [0;1]$

ونبين ان $U_{n+1} \in [0;1]$

لدينا $0 \le U_n \le 1$ يعني $1 \le U_n + 1 \le 2$ اي $\frac{1}{2} \le \frac{U_n+1}{2} \le 1$

ومنه $0 \le \sqrt{\frac{1}{2}} \le \sqrt{\frac{1+U_n}{2}} \le 1$ وبالتالي $U_{n+1} \in [0;1]$

اذن $\forall n \in \mathbb{N} ;\ U_n \in [0;1]$

-2 بين أن : المتتالية U_n تزايدية

ضرب في المرافق

$$U_{n+1} - U_n = \sqrt{\frac{1+U_n}{2}} - U_n = \frac{\frac{1+U_n}{2} - U_n}{\sqrt{\frac{1+U_n}{2}} + U_n} = \frac{1+U_n-U_n^2}{2\left(\sqrt{\frac{1+U_n}{2}}+U_n\right)} = \frac{(1-U_n)(1+2U_n)}{2\left(\sqrt{\frac{1+U_n}{2}}+U_n\right)}$$

ولدينا $U_n \le 1$ اي $1 - U_n \ge 0$ و $0 \le U_n \le 1$ اي $1 \le 1 + 2U_n \le 3$

اذن $(1-U_n)(1+2U_n) \ge 0$ و $2\left(\sqrt{\frac{1+U_n}{2}} + U_n\right) \ge 0$

وبالتالي $U_{n+1} - U_n \ge 0$ وهذا يعني ان المتتالية U_n تزايدية

-3 نضع: $U_0 = \cos(\theta)$ حيث $\theta \in [0;\frac{\pi}{2}]$

بين أن $\forall n \in \mathbb{N} ;\ U_n = \cos(\frac{\theta}{2^n})$ (علما ان $2\cos^2(y) = 1 + \cos(2y)$)

من اجل n=0 لدينا $U_0 = \cos(\theta)$ ومنه الخاصية صحيحة من اجل n=0

الاستدلال بالترجع

نفترض $\forall n \in \mathbb{N} ;\ U_n = \cos(\frac{\theta}{2^n})$

ونبين ان $U_{n+1} = \cos(\frac{\theta}{2^{n+1}})$

لدينا $U_n = \cos(\frac{\theta}{2^n})$

فإن
$$U_{n+1} = \sqrt{\frac{1+U_n}{2}} = \sqrt{\frac{1+\cos(\frac{\theta}{2^n})}{2}} = \sqrt{\frac{1+\cos(2\frac{\theta}{2^{n+1}})}{2}} = \sqrt{\frac{2\cos^2(\frac{\theta}{2^{n+1}})}{2}}$$

(علما ان $2\cos^2(y) = 1 + \cos(2y)$)

اي $U_{n+1} = \cos(\frac{\theta}{2^{n+1}})$

ومنه $\forall n \in \mathbb{N} ;\ U_n = \cos(\frac{\theta}{2^n})$

هذا وبالله التوفيق