Résumé de Cours : **géométrie analytique de l'espace** PROF : ATMANI NAJIB

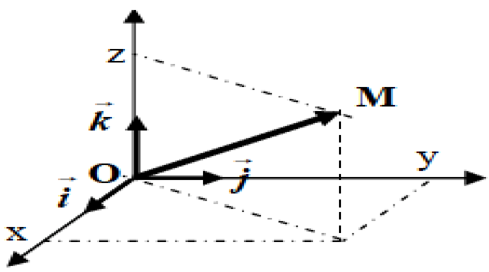
1BAC Science EX BIOF

Géométrie analytique de l'espace

I)LE REPERE DANS L'ESPACE et LA BASE DANS V_3

1) Le repère dans l'espace $(\mathscr{E})$

Propriété et définition: Soit O un point dans l'espace $(\mathscr{E})$, $\vec{i}$ et $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires :



$(\forall M \in (\mathscr{E}))(\exists! \,(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{i} + z\vec{k}$

Le quadruplet $R\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ s'appelle **u**n repère dans l'espace $(\mathcal{E})$ **;** on écrit $M(x, y, y)$

- Le réel x s'appelle l'abscisse du point M dans le repère R
- Le réel y s'appelle l'ordonnée du point M dans le repère R
- Le réel z s'appelle la cote du point M dans le repère R

Remarque : Pour définir un repère de l'espace il suffit d'un point et de 3 vecteurs non coplanaires

2) La base dans l'espace vectoriel V_3 . $B\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$

Soit $\vec{i}$ et $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires dans V_3

On a : $(\forall \vec{u} \in V3)(\exists! \,(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;/$

$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{i} + z\vec{k}$

Le triplet $B\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ s'appelle une base de l'espace vectoriel V_3 on écrit $\vec{u}\left(x;y;z\right)$

- Le réel x s'appelle la première composante du vecteur $\vec{u}$ dans la base β
- Le réel y s'appelle la deuxième composante du vecteur $\vec{u}$ dans la base β
- Le réel z s'appelle la troisième composante du vecteur $\vec{u}$ dans la base β

Remarque : Pour définir une base de l'espace vectoriel V_3 , il suffit de trois vecteurs non coplanaires.

3) Les opérations dans V_3 .

- $\vec{u}\left(x;y;z\right)$ et $\vec{v}\left(x';y';z'\right)$ deux vecteurs dans l'espace vectoriel V_3 muni de la base $B\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ on a donc :

$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{i} + z\vec{k}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{i} + z'\vec{k}$ par suite :

$\vec{u}+\vec{v} = \left(x+x'\right)\vec{i} + \left(y+y'\right)\vec{j} + \left(z+z'\right)\vec{k}$

D'où : $\vec{u}+\vec{v}\left(x+x';y+y';z+z'\right)$

si k est un réel alors : $k\vec{u}\left(kx;ky;kz\right)$

- Si I est le milieu du segment $[AB]$ alors : $I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)$
- Dans l'espace muni d'un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$

Si $A\left(x_A;y_A;z_A\right)$ et $B\left(x_B;y_B;z_B\right)$ alors

$\overrightarrow{AB}\left(x_B-x_A;x_B-x_A;z_B-z_A\right)$

- $\vec{u}\left(x;y;z\right)$ et $\vec{v}\left(x';y';z'\right)$ sont égaux si et seulement si :x = x' , y = y' et z = z'.

II) CONDITIONS ANALYTIQUE DE COLINEARITE DE DEUX VECTEURS.

Théorème : Soient $\vec{u}\left(x;y;z\right)$ et $\vec{v}\left(x';y';z'\right)$ deux vecteurs non nuls. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement tous les déterminants extraits de $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}$ sont nuls c'est-à-dire :

$yz' - zy' = 0$ et $xy' - yx' = 0$ et $xz' - zx' = 0$

Remarques : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont des triplets proportionnels.

III) CONDITIONS ANALYTIQUE DE COPLANARITE DE TROIS VECTEURS.

Théorème et définition : Soient $B\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ une base de V_3 $\vec{u}\left(x;y;z\right)$ et $\vec{v}\left(x';y';z'\right)$ et $\vec{w}\left(x'';y'';z''\right)$ trois vecteurs.

le déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ se note :

$\det\left(\vec{u};\vec{v};\vec{w}\right)$ et on a :

$$\det\left(\vec{u};\vec{v};\vec{w}\right)=\begin{vmatrix}x & x' & x''\\ y & y' & y''\\ z & z' & z''\end{vmatrix}=x\begin{vmatrix}y' & y''\\ z' & z''\end{vmatrix}-y\begin{vmatrix}x' & x''\\ z' & z''\end{vmatrix}+z\begin{vmatrix}x' & x''\\ y' & y''\end{vmatrix}$$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si $\det\left(\vec{u};\vec{v};\vec{w}\right)=0$

IV) Représentation paramétrique d'une droite dans l'espace

soit la droite (D) passant par le point $A\left(x_A;y_A;z_A\right)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\left(a;b;c\right)$

$$M\left(x;y;z\right)\in\left(D\right)\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{R}\,/\,\overrightarrow{AM}=k\vec{u}$$

$$\begin{pmatrix}x-x_A\\ y-y_A\\ z-z_A\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=x_A+k\times a\\ y=y_A+k\times b\\ z=z_A+k\times c\end{array}\right.\quad(k\in\mathbb{R})$$

point d'attache vecteur directeur

Ce système est appelé représentation paramétrique de la droite (D) passant par le point $A\left(x_A;y_A;z_A\right)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\left(a;b;c\right)$

V) deux équations cartésiennes d'une droite dans l'espace

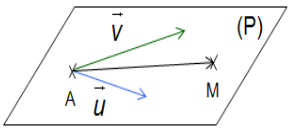
Propriété et définition : soit (D) la droite passant par le point $A\left(x_A;y_A;z_A\right)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\left(a;b;c\right)$

Si $abc\neq0$ alors : le système : $\dfrac{x-x_A}{a}=\dfrac{y-y_A}{b}=\dfrac{z-z_A}{c}$ s'appelle deux équations cartésiennes de la droite(D)

Si $ab\neq0$ et $c=0$ alors : le système : $\left\{\begin{array}{l}\dfrac{x-x_A}{a}=\dfrac{y-y_A}{b}=\dfrac{z-z_A}{c}\\ z-z_A=0\end{array}\right.$ s'appelle deux équations cartésiennes de la droite(D)

V/) Représentation paramétrique d'un PLAN dans l'espace

Soit $P\left(A;\vec{u};\vec{v}\right)$ le plan qui passe par $A\left(x_A;y_A;z_A\right)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}\left(a;b;c\right)$, $\vec{v}\left(a';b';c'\right)$



$$M\in P\left(A;\vec{u};\vec{v}\right)\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{R}:\exists k'\in\mathbb{R}\,/\,\overrightarrow{AM}=k\vec{u}+k'\vec{v}$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x-x_A\\ y-y_A\\ z-z_A\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}+k'\begin{pmatrix}a'\\ b'\\ c'\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=x_A+k\times a+k'\times a'\\ y=y_A+k\times b+k'\times b'\\ z=z_A+k\times c+k'\times c'\end{array}\right.$$

point d'attache premier vecteur directeur second vecteur directeur

Ce système est appelé représentation paramétrique du plan $P\left(A;\vec{u};\vec{v}\right)$

V//) EQUATION CARTESIENNE D'UN PLAN dans l'espace

Définition : Soit $P\left(A;\vec{u};\vec{v}\right)$ le plan qui passe par $A\left(x_A;y_A;z_A\right)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}\left(\alpha;\beta;\delta\right)$, $\vec{v}\left(\alpha';\beta';\delta'\right)$ l'équation cartésienne du plan $\left(P\right)$ s'écrit sous forme: $ax+by+cz+d=0$ Avec : $\left(a;b;c\right)\neq\left(0;0;0\right)$

Exemple : Déterminer l'équation cartésienne du plan $P\left(A;\vec{u};\vec{v}\right)$ qui passe par $A\left(1;-3;1\right)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}\left(-2;4;1\right)$ et $\vec{v}\left(-1;0;2\right)$

solution :

$M\left(x;y;z\right)\in P\left(A;\vec{u};\vec{v}\right)\Leftrightarrow\det\left(\overrightarrow{AM};\vec{u};\vec{v}\right)=0$

$\overrightarrow{AM}\left(x-1;y+3;z-1\right)$

$$\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x-1 & -2 & -1\\ y+3 & 4 & 0\\ z-1 & 1 & 2\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow\left(x-1\right)\begin{vmatrix}4 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix}-\left(y+3\right)\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}+\left(z-1\right)\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 4 & 0\end{vmatrix}=0$$

$$8\left(x-1\right)+3\left(y+3\right)+4\left(z-1\right)=0\Leftrightarrow8x-8+3y+9+4z-4=0$$

$$\left(P\right):8x+3y+4z-3=0$$

V///) Position relative de droites et de plan dans l'espace

1) Position relative de deux droites dans l'espace

Pour étudier la position relative de deux droites de l'espace Il suffit d'étudier leurs **vecteurs directeurs**.

Soient $D\left(A;\vec{u}\right)$ et $D'\left(B;\vec{v}\right)$

si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** alors les droites $\left(D\right)$ et $\left(D'\right)$ sont parallèles.

Deux cas sont alors possibles :

– si A appartient à D', alors les droites D et D' sont confondues ;

– si A n'appartient pas à D', alors les droites D et D' sont strictement parallèles, leur intersection est vide.

si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires alors les droites D et D' sont soit sécantes (leur intersection est un point) soit non coplanaires (leur intersection est vide).

2) Position relative d'une droites et d'un plan dans l'espace

2-1)*Proposition1* :La droite $D\left(A;\vec{u}\right)$ et le plan $P\left(B;\vec{v};\vec{w}\right)$ sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires et dans le cas contraire la droite coupe le plan

Proposition2 : soit la droite (D) passant par le point $A(x_A;y_A;z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(\alpha;\beta;\gamma)$ et un plan (P) d'équation cartésienne: $ax+by+cz+d=0$

(D) // (P) si et seulement si $a\alpha+b\beta+c\gamma=0$

(D) coupe (P) si et seulement si $a\alpha+b\beta+c\gamma\neq 0$

*Remarque1 :*si $(D)//(P)$ alors Tout vecteur directeur de (D) est alors un vecteur directeur de (P)

2-2) Autre méthode pour étudier la position relative d'une droite et d'un plan ?

On étudie la position relative d'une droite D passant par A, de vecteur directeur $\vec{u}$ et d'un plan P de vecteur normal $\vec{n}$. On s'intéresse alors aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{n}$.

Si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux, alors la droite D est parallèle au plan P.

Si, en outre, le point A appartient au plan P, alors la droite D est incluse dans le plan P.

Sinon, la droite D est strictement parallèle au plan P et leur intersection est vide.

Si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ ne sont pas orthogonaux, alors D et P sont sécants ; leur intersection est un point.

Si, par ailleurs, $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires, alors la droite D est orthogonale au plan P.

*Remarque2:*Il existe plusieurs façons de montrer qu'une droite (D) est incluse dans un plan (P).Une première méthode consiste à montrer dans un premier temps que (D) est parallèle à (P) puis dans un deuxième temps qu'un point de (D) appartient à (P)

3)position relative de deux plans :

Proposition **:**Soient deux plans (P) et (P') d'équations cartésiennes:

$(P): ax+by+cz+d=0$ et $(P'): a'x+b'y+c'z+d'=0$

1) (P) et (P') se coupent si et seulement si

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}\neq 0 \text{ ou } \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}\neq 0 \text{ ou } \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}\neq 0$$

et leur intersection est une droite

2) (P) // (P') si et seulement si :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}=0 \text{ et } \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}=0 \text{ et } \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}=0$$

3)si $a\neq 0$ et $b\neq 0$ et $c\neq 0$ alors $(P)//(P')\Leftrightarrow \frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}$

4/ Droite d'intersection de deux plans

pour trouver la représentation paramétrique d'une droite qui est l'intersection de deux plans.

Voyons une stratégie qu'il est possible d'employer :

<u>Exemple</u>: Soient les plans (P) et (Q) d'équations cartésiennes respectives :

$(P): x-y-3z-2=0 \quad (Q): 2x+y+z-1=0$

Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) intersection de (P) et de (Q).

Solutions :(D) a pour système d'équations cartésiennes :

$$\begin{cases} x-y-3z-2=0 \\ 2x+y+z-1=0 \end{cases}$$

Il va donc falloir être capable de passer de ce système à une représentation paramétrique:

$$\begin{cases} x-y-3z-2=0 \\ 2x+y+z-1=0 \end{cases}$$

Une technique consiste à prendre une des coordonnées comme paramètre,

par exemple puis à exprimer les deux autres coordonnées en fonction de z.

$$\begin{cases} x=y+3z+2 \\ 2(y+3z+2)+y+z-1=0 \\ z=z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y+3z+2 \\ 3y+7z+3=0 \\ z=z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1-\frac{7}{3}z+3z+2 \\ y=-1-\frac{7}{3}z \\ z=z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1+\frac{2}{3}z \\ y=-1-\frac{7}{3}z \\ z=z \end{cases}$$

Une représentation paramétrique de (D) est donc : (D)

$$\begin{cases} x=1+\frac{2}{3}k \\ y=-1-\frac{7}{3}k \\ z=0+1k \end{cases} \quad (k\in\mathbb{R})$$

(D) passe donc par le point A (1 ; -1 ; 0) et a pour vecteur directeur $\vec{u}\left(\frac{2}{3};\frac{-5}{3};1\right)$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien