

# ETUDE DES FONCTIONS

## I) DERIVATION ET MONOTONIE D'UNE FONCTION

**Propriété :** Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ .

- 1)  $f$  est croissante sur  $I$ ssi  $f'$  est positive sur  $I$ .
- 2)  $f$  est décroissante sur  $I$ ssi  $f'$  est négative sur  $I$ .
- 3)  $f$  est constante sur  $I$ ssi  $f'$  est nulle sur  $I$ .

## II) DERIVATION ET EXTREMUMS

**Propriété :** Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle ouvert  $I$  et  $a \in I$

Si  $f$  admet un extremum relatif en  $a$  alors  $f'(a) = 0$

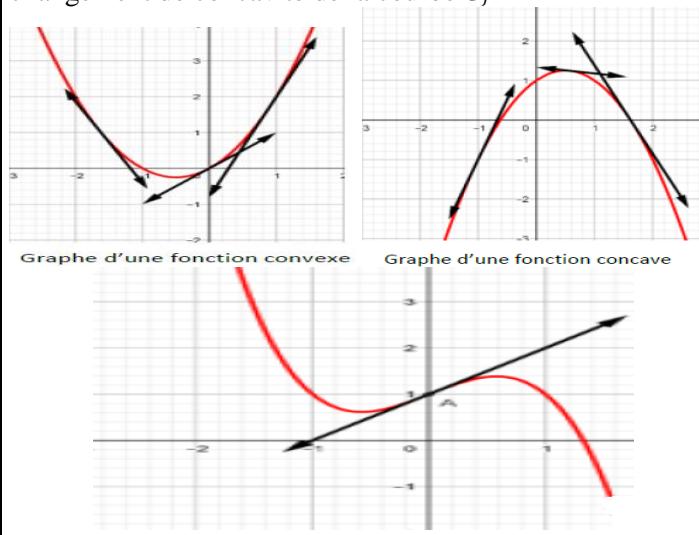
**Propriété :** Si  $f$  est dérivable en  $a$  et admet un extremum en  $a$ , alors sa courbe représentative

Admet une tangente parallèle à  $(Ox)$  en  $A(a, f(a))$

## III) CONCAVITE ; CONVEXITE ; POINTS D'INFLexion

**Définition :** Soit  $f$  une fonction dont la courbe représentative est  $C_f$ .

- 1) On dit que la courbe est convexe si elle se trouve au-dessus de toutes ses tangentes
- 2) On dit que la courbe est concave si elle se trouve au-dessous de toutes ses tangentes.
- 3) Un point d'inflexion est un point où s'opère un changement de concavité de la courbe  $C_f$



Point d'inflexion en  $A$

**Remarque :** Si  $f$  est dérivable en  $a$  et  $C_f$  traverse sa tangente en  $A$  alors le point  $A$  est un point d'inflexion

**Théorème :** Soit  $f$  une fonction deux fois dérivable sur un intervalle  $I$ .

- 1) Si  $f''$  est positive sur  $I$  alors  $C_f$  est convexe sur  $I$ .
- 2) Si  $f''$  est négative sur  $I$  alors  $C_f$  est concave sur  $I$ .
- 3) Si  $f''$  s'annule en  $a$  en changeant de signe alors  $C_f$  admet un point d'inflexion en  $A(a, f(a))$

soit les points d'inflexions de  $(C_f)$

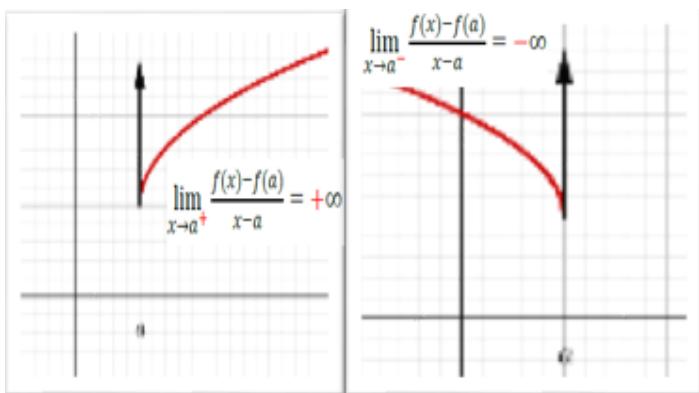
## IV) DEMI-TANGENTE VERTICALE

**Propriété :** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle de la forme  $[a, a + r[$

Si  $f$  est continue à droite de  $a$  et  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm \infty$

Alors la courbe  $C_f$  admet une demi-tangente verticale à droite de  $a$ .

**Interprétation géométriques**



## V) LES ELEMENTS DE SYMETRIE D'UNE COURBE.

- 1) Soit  $f$  une fonction numérique dont l'ensemble de définition est  $D_f$ .

La droite ( $\Delta$ ):  $x = a$  est un axe de symétrie de la courbe  $C_f$  si et seulement si :

- a)  $(\forall x \in D_f)(2a - x \in D_f)$
- b)  $(\forall x \in D_f)(f(2a - x) = f(x))$

- 2) Soit  $f$  une fonction numérique dont l'ensemble de définition est  $D_f$ .

Le point  $\Omega(a, b)$  est un centre de symétrie de la courbe  $C_f$  si et seulement si :

- a)  $(\forall x \in D_f)(2a - x \in D_f)$
- b)  $(\forall x \in D_f)(f(2a - x) = 2b - f(x))$

**Remarques :**

- 1) Si une fonction est paire alors l'axe ( $Oy$ ) est un axe symétrie à la courbe
- 2) Si une fonction est impaire alors le point  $O(0;0)$  est un centre symétrie la courbe

## VI) Etude d'asymptotes et de branches infinies

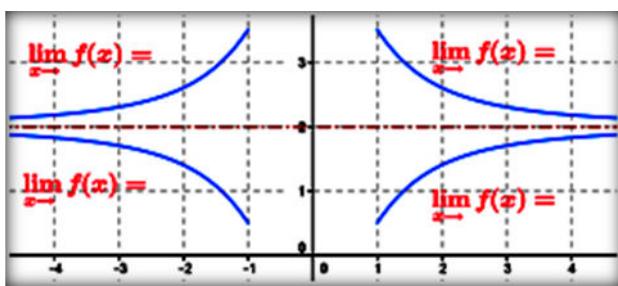
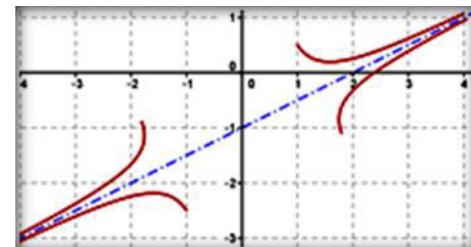
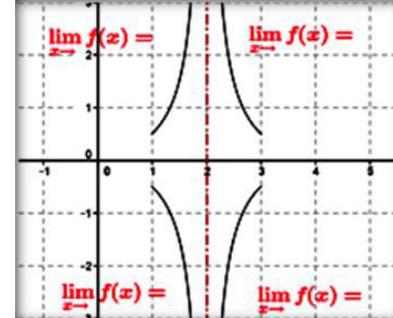
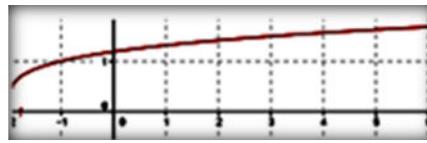
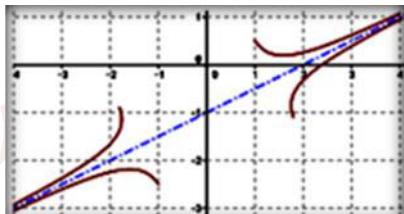
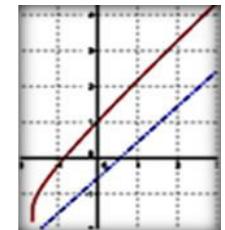
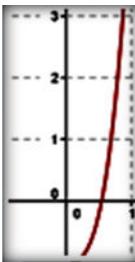
L'étude des branches infinies a pour objectif de comprendre en détails le comportement de la courbe de la fonction

La première chose à faire est de calculer les limites aux bornes du domaine de définition de la fonction

**Voir le tableau suivant :**



## II) BRANCHES INFINIES.

Si : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$	Si : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$	Si : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$
 <p>La droite (<math>\Delta</math>) d'équation <math>y = b</math> est une Asymptôte à (<math>C_f</math>) au voisinage de <math>\infty</math></p>	<p>La droite (<math>\Delta</math>) : <math>y = ax + b</math> est une Asymptôte oblique à (<math>C_f</math>) signifie que : <math>\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (ax + b)) = 0</math></p>  <p><math>(C_f)</math> est au dessus de (<math>\Delta</math>) <math>\Leftrightarrow (f(x) - (ax + b)) &gt; 0</math> <math>(C_f)</math> est en dessous de (<math>\Delta</math>) <math>\Leftrightarrow (f(x) - (ax + b)) &lt; 0</math></p>	 <p>La droite (<math>\Delta</math>) d'équation <math>x = a</math> est une Asymptôte à (<math>C_f</math>) au voisinage de <math>a</math></p>
<p>Détermination de la nature de la branche infinie dans le cas : <math>\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty</math></p>		
<p>Si : <math>\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0</math></p>  <p>La courbe (<math>C_f</math>) admet une branche parabolique de direction (<math>Ox</math>)</p>	<p>Si : <math>\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0</math></p> <p><math>\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) = b</math></p>  <p>La droite (<math>\Delta</math>) d'équation <math>y = ax + b</math> est une Asymptôte à (<math>C_f</math>) au voisinage de <math>\infty</math>.</p>	<p>Si : <math>\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty</math></p>  <p>La courbe (<math>C_f</math>) admet une branche parabolique de direction la droite (<math>D</math>), d'équation <math>y = ax</math></p>
		 <p>La courbe (<math>C_f</math>) admet une branche parabolique de direction (<math>Oy</math>)</p>