

I. Formules de transformations $\sin(a \pm b)$; $\cos(a \pm b)$; $\tan(a \pm b)$:

01. Transformation de $\cos(a+b)$ puis $\sin(a+b)$:

- Le plan (P) est rapporté au repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) .
- $c(O,1)$ est le cercle trigonométrique lié au repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .
- A et B et I trois points de (P) tel que : $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et a et b sont abscisses curvilignes respectivement de A et B.
- On rappel : mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA})$ est a c.à.d. $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) \equiv a (2\pi)$ ou encore $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) = a + 2k\pi$; ($k \in \mathbb{Z}$).
- On rappel : mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB})$ est b c.à.d. $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB}) \equiv b (2\pi)$ ou encore $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB}) = b + 2k\pi$; ($k \in \mathbb{Z}$)

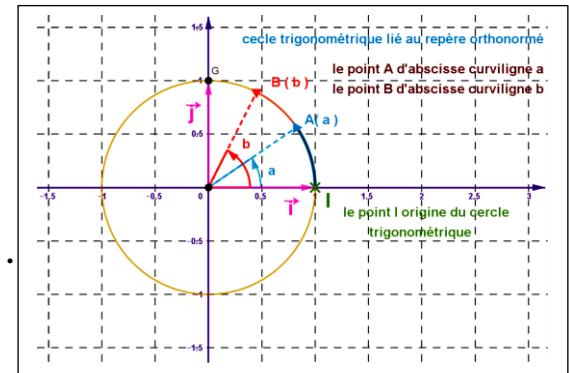
1 Déterminer les coordonnées des vecteurs \overrightarrow{OA} et \overrightarrow{OB} .

2 Calculer : $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})$ en fonction de a et b.

3 Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ de deux façons différentes.

4 On déduit la formule de $\cos(a-b)$ et $\cos(a+b)$.

5 On déduit la formule de $\sin(a+b)$ et $\sin(a-b)$.



02. Propriété :

Pour tous a et b de \mathbb{R} on a :

$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$	$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$	$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$

03. Conséquences :

Le cas où $a = b$ on obtient :

- $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$ et $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$.
- D'après $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$ on obtient : $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$.
- $\sin^2(a) = \frac{1 - \cos(2a)}{2}$ et $\cos^2(a) = \frac{1 + \cos(2a)}{2}$

04. Application :

1 Trouver la valeur de $\cos \frac{7\pi}{12}$. On a :

$$\cos \frac{7\pi}{12} = \cos \left(\frac{3\pi + 4\pi}{12} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} \right) = \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Conclusion : $\cos \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

2 Calculer : $\cos \frac{\pi}{8}$

Correction :

On a : $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$ on prend $a = \frac{\pi}{8}$ d'où $\cos \frac{\pi}{4} = 2\cos^2 \frac{\pi}{8} - 1$.

Par suite $\cos \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+\cos \frac{\pi}{4}}{2}}$ ou $\cos \frac{\pi}{8} = -\sqrt{\frac{1+\cos \frac{\pi}{4}}{2}}$ mais $0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$ donc $\cos \frac{\pi}{8} > 0$.

Conclusion : $\cos \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+\cos \frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}$

05. Transformation de : $\tan(a+b)$

- a et b de \mathbb{R} tel que : $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $a+b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $a-b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

1 Déterminer $\tan(a+b)$ en fonction de $\sin a$; $\cos b$; $\cos a$ et $\sin b$.

2 Déterminer $\tan(a+b)$ en fonction de $\tan a$ et $\tan b$ (on peut factoriser par $\frac{1}{\cos a \times \cos b}$)

3 On déduit : $\tan(a-b)$ et $\tan(2a)$

06. Propriété :

a et b de \mathbb{R} tel que : $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $a+b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $a-b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. on a :

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \times \tan b} \text{ et } \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \times \tan b} \text{ et } \tan(2a) = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}.$$

II. Formules de transformations des sommes à des produits et les produits à des sommes :

01. Activité :

D'après les formules $\cos(a \pm b)$ et $\sin(a \pm b)$.

1 Simplifier : $\cos(a+b) + \cos(a-b)$ et $\cos(a+b) - \cos(a-b)$ et $\sin(a+b) + \sin(a-b)$ et $\sin(a+b) - \sin(a-b)$.

2 On déduit les formules de transformations de : $\cos a \times \cos b$ et $\sin a \times \sin b$ et $\sin a \times \cos b$.

3 On pose : $a+b=x$ et $a-b=y$ écrire a et b en fonction de x et y.

4 On déduit les formules de : $\cos x + \cos y$ et $\cos x - \cos y$ et $\sin x + \sin y$ et $\sin x - \sin y$ en fonction de $\sin \frac{x-y}{2}$; $\cos \frac{x+y}{2}$; $\cos \frac{x-y}{2}$ et $\sin \frac{x+y}{2}$.

5 On déduit les formules de transformations obtenues.

02.

Propriété :

a et b de \mathbb{R} on a :

Transformations des sommes à des produits	Transformations des produits à des sommes
$\cos a + \cos b = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$	$\cos a \times \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$
$\cos a - \cos b = -2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$	$\sin a \times \sin b = -\frac{1}{2} [\cos(a+b) - \cos(a-b)]$
$\sin a + \sin b = 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$	$\sin a \times \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$
$\sin a - \sin b = -2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$	

03.

Exemple :

1 Trouver la valeur de chaque expressions : $\cos \frac{\pi}{12} + \cos \frac{5\pi}{12}$ et $\cos \frac{\pi}{12} \times \cos \frac{5\pi}{12}$.

$$\text{On a : } \cos \frac{5\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{12} = 2 \cos \left(\frac{\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{12}}{2} \right) \times \cos \left(\frac{\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{12}}{2} \right) = 2 \cos \frac{\pi}{4} \times \cos \frac{\pi}{6} = 2 \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\text{Conclusion : } \cos \frac{\pi}{12} + \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

III. D'autres formules de transformations :

A. Transformation de : $a \cos x + b \sin x$:

01. Activité :

a et b de \mathbb{R}^* , on considère l'expression suivante $A = a \cos x + b \sin x$.

1 Factoriser l'expression A en fonction de $\sqrt{a^2 + b^2}$.

2 Trouver une écriture de A sous la forme de $\sqrt{a^2 + b^2} \times \sin(x + \alpha)$ ou $\sqrt{a^2 + b^2} \times \cos(x - \alpha)$ avec α de \mathbb{R} (on remarque que $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$).

3 Donner les deux transformations obtenues .

02.

Propriété :

a et b de \mathbb{R}^* ; on a :

- $a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \times \sin(x + \alpha)$; (avec $\sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $\cos \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$).
- $a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \times \cos(x - \alpha)$; (avec $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$).

03.

Exemple :

I. Trouver une transformation de $\sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x$.

$$\text{On a : } \sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} \sin 2x + \sin \frac{\pi}{6} \cos 2x \right) = 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right)$$

B. Transformations de : $\cos x$; $\tan x$ et $\sin x$ en fonction de $t = \tan \frac{x}{2}$.

01.

Activité :

On pose : $x \neq \pi + 2k\pi$ et $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

1 On rappel que : $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$ et $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$ écrire ses deux formules avec $2a = x$.

2 On pose : $t = \tan \frac{x}{2}$ trouver $\cos x$; $\sin x$ et $\tan x$ en fonction de t (on peut diviser le

$$\text{numérateur et le dénominateur par } \cos^2 \left(\frac{x}{2} \right) + \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right) = 1$$

Correction pour $\sin x$:

$$\begin{aligned} & \frac{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{1 + \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = 2 \frac{\tan \frac{x}{2}}{1 + t^2} \\ \text{On a : } \sin x &= 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \frac{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = 2 \frac{\cos^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = 2 \frac{\cos^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} = 2 \end{aligned}$$

02.

Propriété :

On pose : $t = \tan \frac{x}{2}$ avec $x \neq \pi + 2k\pi$ et $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

$$\text{On a : } \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \text{ et } \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \text{ et } \tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

03.

Exemple :

$$\text{Calculer : } \tan \frac{\pi}{8}.$$

Correction :

$$\text{On a : } \sin a = \frac{2t}{1+t^2} \text{ avec } t = \tan \frac{a}{2} \text{ et on prend } a = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{D'où : } \sin \frac{\pi}{4} = \frac{2t}{1+t^2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2t}{1+t^2} \Leftrightarrow t^2 - 2\sqrt{2}t + 1 = 0$$

$$\text{Donc } \Delta' = 1 \text{ par suite on a deux solutions : } t_1 = -1 + \sqrt{2} \text{ et } t_2 = 1 + \sqrt{2}$$

$$\text{On a : } 0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{4} \text{ donc } \tan 0 < \tan \frac{\pi}{8} < \tan \frac{\pi}{4} \text{ d'où : } 0 < \tan \frac{\pi}{8} < 1 \text{ la solution acceptée est } t_1 = -1 + \sqrt{2}.$$

Conclusion : $\tan \frac{\pi}{8} = -1 + \sqrt{2}$.

IV. Rappel sur les équations trigonométriques :

A. Équation de la forme : $x \in \mathbb{R} / \cos x = a$

01. Propriété :

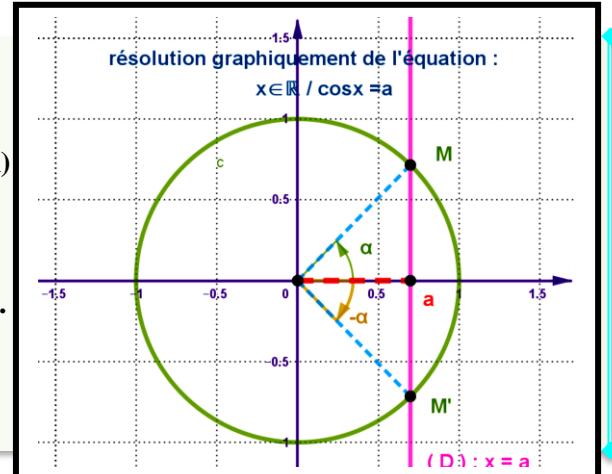
a est un nombre réel donné l'ensemble de solutions de l'équation $x \in \mathbb{R} / \cos x = a$ est :

- Si $a \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ alors $S = \emptyset$ (pas de solution)
- Si $a \in [-1, 1]$ on cherche α tel que $a = \cos \alpha$ d'où :

$$\cos x = a \Leftrightarrow \cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = -\alpha + 2k\pi \end{cases}; k \in \mathbb{Z}.$$

Par suite l'ensemble de solutions de l'équation est :

$$S = \{\alpha + 2k\pi, -\alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}.$$



02. Cas particuliers :

- $a = 1$ on a : $S = \{2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$. $a = -1$ on a : $S = \{\pi + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.
- $a = 0$ on a : $S = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$

03. Exemple :

Résoudre l'équation : (E) : $x \in \mathbb{R} / \cos x = \frac{1}{2}$.

$$\text{On a : } \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}; k \in \mathbb{Z}.$$

Conclusion : l'ensemble de solutions de l'équation (E) est : $S = \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi, -\frac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$.

B. Équation de la forme : $x \in \mathbb{R} / \sin x = a$

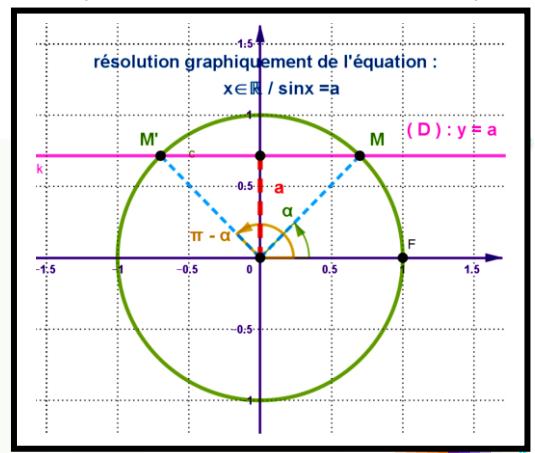
01. Propriété :

a est un nombre réel donné ensemble de solutions de l'équation $x \in \mathbb{R} / \sin x = a$ est :

- Si $a \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ alors $S = \emptyset$ (pas de solution).
- Si $a \in [-1, 1]$ on cherche α tel que $a = \sin \alpha$ d'où :

$$\sin x = a \Leftrightarrow \sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{cases}; k \in \mathbb{Z}.$$

Par suite ensemble de solutions de l'équation est : $S = \{\alpha + 2k\pi, \pi - \alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.



02. Cas particuliers :

$a = 1$ on a : $S = \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$. $a = -1$ on a : $S = \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$. $a = 0$ on a : $S = \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

03. Exemple : Résoudre l'équation : (E) : $x \in \mathbb{R} / \sin x = \frac{1}{2}$.

$$\text{On a : } \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}; k \in \mathbb{Z}.$$

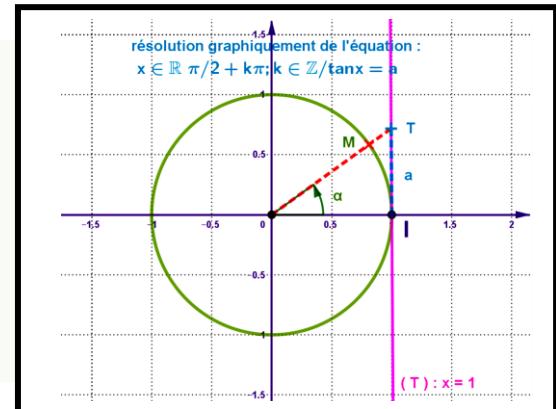
Conclusion : l'ensemble de solutions de l'équation (E) est : $S = \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$.

C. Equation de la forme : $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} : \tan x = a$

01. Propriété :

a est un nombre réel donné pour résoudre l'équation (E) : $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} : \tan x = a$.

- on cherche α tel que $a = \tan \alpha$ d'où :
- $\tan x = a \Leftrightarrow \tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi ; k \in \mathbb{Z}$.
- Par suite ensemble de solutions de l'équation est : $S = \{\alpha + k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.



D. Equation de la forme : $x \in \mathbb{R} : a \cos x + b \cos x = c$.

01. Activité :

1 Résoudre l'équation suivante de deux façons différentes : (E) : $x \in \mathbb{R} : \cos x + \sqrt{3} \cos x = 1$.

02. Propriété :

Pour résoudre l'équation suivante (E) : $x \in \mathbb{R} : a \cos x + b \cos x = c$ on suit les étapes suivantes :

1^{ère} étape :

- On écrit l'équation sous la forme suivante (E) $\Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} \left[\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right] = c$.
- Puis on l'écrit (E) $\Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} [\cos \alpha \cos x + \sin \alpha \sin x] = c$ (ou $\sqrt{a^2 + b^2} [\sin \alpha \cos x + \cos \alpha \sin x] = c$)
- Puis on l'écrit (E) $\Leftrightarrow \cos(x - \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ (ou $\sin(x + \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$).

2^{ième} étape :

- Au lieu de résoudre l'équation (E) : $x \in \mathbb{R} : a \cos x + b \cos x = c$ on résoudre l'équation :

$$\cos(x - \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \left(\text{ou } \sin(x + \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

3^{ième} étape :

Ensemble de solution de l'équation est lié à la valeur de $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

- Si $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \notin [-1,1]$ l'équation n'a pas de solution ; $S = \emptyset$
- Si $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \in [-1,1]$ on cherche β tel que $\cos\beta = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (ou $\sin\beta = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$) d'où
 $(E) \Leftrightarrow \cos(x-\alpha) = \cos\beta$ (ou $\sin(x+\alpha) = \sin\beta$).

03.

Exemple :

Résoudre l'équation : (E) : $x \in \mathbb{R} : \cos 3x + \cos 3x = 1$. on a :

$$\begin{aligned}
 \cos 3x + \cos 3x &= 1 \Leftrightarrow \sqrt{2} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 3x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 3x \right] = 1 \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{2} \left[\cos \frac{\pi}{4} \cos 3x + \sin \frac{\pi}{4} \sin 3x \right] = 1 \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - 3x \right) = 1 \\
 &\Leftrightarrow \cos \left(\frac{\pi}{4} - 3x \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos \left(\frac{\pi}{4} - 3x \right) = \cos \frac{\pi}{4} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{4} - 3x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \frac{\pi}{4} - 3x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}; k \in \mathbb{Z} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2k\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{6} - \frac{2k\pi}{3} \end{cases}; k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

Conclusion : l'ensemble de solutions de l'équation (E) est : $S = \left\{ \frac{\pi}{6} - \frac{2k\pi}{3}, -\frac{2k\pi}{3} / k \in \mathbb{Z} \right\}$.

