

LES SUITES NUMERIQUES

I) GENERALITES

1) Définitions et notations.

Définition : On appelle suite numérique toute application de \mathbb{N} (ou une partie I de \mathbb{N}) vers \mathbb{R}

$$u : I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \mapsto u(n) = u_n$$

Notation : Si u est une suite numérique définie sur \mathbb{N} l'image de l'entier n par u se note u_n et s'appelle le terme de rang n de la suite

L'entier n s'appelle l'indice du terme u_n

La suite numérique u se note : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou $(u_n)_n$

2) Comment générer une suite

Une suite numérique peut être définie de deux manières différentes :

a) Suite définie par : une expression explicite

Dans laquelle le terme u_n de la suite $(u_n)_n$ est définie en fonction de n **Exemple :** soit $(u_n)_n$ la suite définie par :

$$u_n = 2n + 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

b) Une suite définie par : une expression récurrente

Ces suites s'appellent des suites récurrentes, elles sont définies par le (ou les) premier (s) terme (s) et une relation entre deux ou plusieurs termes consécutifs.

Exemple1 : Suites récurrentes du premier ordre

soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par :

$$u_0 = 2; u_{n+1} = 5u_n - 7 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

3) Suites majorées, suites minorées, suites bornées.

Définition : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique. ($\mathbb{I} \subset \mathbb{N}$)

- On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{I}}$ est majorée s'il existe un réel M tel que : $\forall n \in \mathbb{I} \quad u_n \leq M$
- On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{I}}$ est minorée s'il existe un réel m tel que : $\forall n \in \mathbb{I} \quad m \leq u_n$
- On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{I}}$ est bornée si elle est majorée et minorée.

Propriété : Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{I}}$ est bornée si et seulement s'il existe un réel positif M tel que :

$$\forall n \in \mathbb{I} \quad |u_n| \leq M$$

4) Monotonie d'une suite.

Définition : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{I}}$ une suite numérique. ($\mathbb{I} \subset \mathbb{N}$)

On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{I}}$ est croissante si :

$$\forall n \in \mathbb{I} \quad \forall m \in \mathbb{I} : m \leq n \Rightarrow u_m \leq u_n$$

On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{I}}$ est décroissante si : $\forall n \in \mathbb{I}$

$$\forall m \in \mathbb{I} : m \leq n \Rightarrow u_m \geq u_n$$

On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{I}}$ est monotone si elle est croissante ou décroissante sur \mathbb{I} .

Théorème : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{I}}$ une suite numérique. ($\mathbb{I} \subset \mathbb{N}$)

- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{I}}$ est croissante si et seulement si : $\forall n \in \mathbb{I} \quad u_{n+1} \geq u_n$
- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{I}}$ est décroissante si et seulement si : $\forall n \in \mathbb{I} \quad u_{n+1} \leq u_n$

II) SUITES ARITHMETIQUES ; SUITES GEOMETRIQUES

1) Suite arithmétique.

Définition : On appelle suite arithmétique toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{I}}$ définie par son premier terme et par la relation récurrente : $\forall n \in \mathbb{I} \quad u_{n+1} = u_n + r$

Où r est un réel fixe. Le réel r s'appelle la raison de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{I}}$.

1.2) propriété caractéristique d'une suite arithmétique **Trois termes consécutifs d'une suite arithmétique.**

$(u_n)_{n \geq p}$ est suite arithmétique si et seulement si

$$2u_{n+1} = u_n + u_{n+2} \quad \forall n \geq p$$

1.3) Terme général d'une suite arithmétique.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{I}}$ une suite arithmétique de raison r et u_p l'un de ses termes on a : $\forall n \in \mathbb{I} \quad u_n = u_p + (n - p)r$

Remarque : Si u_0 est le premier terme d'une suite arithmétique de raison r alors : $u_n = u_0 + nr$

Si u_1 est le premier terme d'une suite arithmétique de raison r alors : $u_n = u_1 + (n - 1)r$

1.4) La somme des termes successifs d'une suite arithmétique.

Soient $(u_n)_n$ une suite arithmétique et p un entier naturel et $S_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_n$

$$\text{On a : } S_n = \frac{(n-p+1)}{2} (u_p + u_n)$$

Avec : $n-p+1$ le nombre des termes de la somme

u_p : le premier terme de la somme

u_n : le dernier terme de la somme

Remarque : On note la somme :

$S_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n$ par :

$$S_n = \sum_{k=p}^{k=n} u_k$$

$$\text{Si } p=0 \text{ on a : } S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = \frac{n+1}{2} (u_0 + u_n)$$

$$\text{Si } p=1 \text{ on a : } S_n = \sum_{k=1}^{k=n} u_k = \frac{n}{2} (u_1 + u_n)$$

2) Suite géométrique.

2.1) Définition : On appelle suite géométrique toute suite $(u_n)_n$ définie par son premier terme et par la relation

récurrente : $u_{n+1} = q u_n \quad \forall n \in I$ où q est un réel fixe. Le réel q s'appelle **la raison** de la suite $(u_n)_n$.

Le premier terme et la raison d'une suite géométrique s'appellent aussi les éléments de la suite géométrique.

2.2) Terme général d'une suite géométrique

Si $(u_n)_{n \in I}$ est une suite géométrique de raison q et si p est un entier naturel alors : $u_n = q^{n-p} u_p \quad \forall n \in I$

Cas particuliers :

1) si $p=0$ alors: $u_n = q^n u_0 \quad$ 2) si $p=1$ alors : $u_n = q^{n-1} u_1$

2.3) La somme des termes consécutifs d'une suite géométrique.

Proposition : Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q , et u_p l'un de ses termes.

Et $S_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n$

Si $q = 1$ alors : $S_n = (n-p+1)u_p$

Si $q \neq 1$ alors : $S_n = u_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$

2.4) Propriété : a, b et c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique

si et seulement si $b^2 = a \times c$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe. C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien

