

TD-PRODUIT SCALAIRE DANS $\mathcal{V}_2$
Etude analytique -Applications : cercle
Exercices avec corrections

Exercice1 : dans Le plan ($\mathcal{P}$) est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j})$ Considérons les points

$$A(1; -3) \text{ et } B(3; 7) \text{ et } C(-3; 1)$$

- 1) Montrer que le triangle ABC est rectangle en C
- 2) Calculer la surface du triangle ABC

Solution : 1)

Methode1 : $\vec{BC}(-6; -6)$ et $\vec{AC}(-4; 4)$ et $\vec{AB}(2; 10)$

$$AB = \|\vec{AB}\| = \sqrt{2^2 + 10^2} = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$$

$$AC = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

Puisque : $AC^2 + BC^2 = 32 + 72 = 104$ et $AB^2 = 104$

Donc : $AC^2 + BC^2 = AB^2$

Donc : le triangle ABC est rectangle en C

Methode2 : $\vec{BC}(-6; -6)$ et $\vec{AC}(-4; 4)$

Donc : $\vec{AC} \cdot \vec{BC} = 24 - 24 + 0$ Donc : $\vec{AC} \perp \vec{BC}$

Donc : le triangle ABC est rectangle en C

2) puisque le triangle ABC est rectangle en C alors :

$$S = \frac{1}{2} CA \times CB = \frac{1}{2} 4\sqrt{2} \times 6\sqrt{2} = 24$$

Exercice2 : dans Le plan ($\mathcal{P}$) est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j})$ Considérons les points

$$A(5; 0) \text{ et } B(2; 1) \text{ et } C(6; 3)$$

- 1) Calculer $\cos(\vec{AB}; \vec{AC})$ et $\sin(\vec{AB}; \vec{AC})$
- 2) en déduire une mesure de l'angle $(\vec{AB}; \vec{AC})$

Solution : 1) $\cos(\vec{AB}; \vec{AC}) = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{\|\vec{AB}\| \times \|\vec{AC}\|}$ et

$$\sin(\vec{AB}; \vec{AC}) = \frac{\det(\vec{AB}; \vec{AC})}{\|\vec{AB}\| \times \|\vec{AC}\|}$$

et on a : $\vec{AB}(-3; 1)$ et $\vec{AC}(1; 3)$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -3 \times 1 + 1 \times 3 = -3 + 3 = 0$$

$$\det(\vec{AB}; \vec{AC}) = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -10$$

$$AB = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10} \text{ et } AC = \sqrt{10}$$

$$\cos(\vec{AB}; \vec{AC}) = \frac{0}{\sqrt{10} \times \sqrt{10}} = 0$$

$$\sin(\vec{AB}; \vec{AC}) = \frac{-10}{\sqrt{10} \times \sqrt{10}} = -1$$

2) on a : $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$ et $AB = AC$ donc le triangle ABC est rectangle et isocèle en A

$$(\vec{AB}; \vec{AC}) = \frac{-\pi}{2} [2\pi] \text{ car : } (\vec{AC}; \vec{BC}) = \frac{-\pi}{4} [2\pi] \text{ et}$$

$$\sin(\vec{AB}; \vec{AC}) = -1$$

$$\text{Donc : } (\vec{AB}; \vec{BC}) = (\vec{AB}; \vec{AC}) + (\vec{AC}; \vec{BC}) [2\pi]$$

$$(\vec{AB}; \vec{BC}) = \frac{-\pi}{2} - \frac{\pi}{4} [2\pi] = -\frac{3\pi}{4} [2\pi]$$

Exercice3 : déterminer une équation cartésienne de la droite (D) qui passe par $A(0; 1)$ et qui admet $\vec{n}(2; 1)$ comme vecteur normal

Solution : on a (D) qui passe $A(0; 1)$ et $\vec{n}(2; 1)$ un vecteur normal donc : une équation cartésienne de la droite (D) est : $2(x - 0) + 1(y - 1) = 0$

donc : (D) : $2x + y - 1 = 0$

Exercice4 : donner un vecteur normal a la droite (D) dans les cas suivants : 1) (D) : $x - 2y + 5 = 0$

2) (D) : $2y - 3 = 0$ 3) (D) : $x - 1 = 0$

Solution : un vecteur normal a la droite (D) d'équation cartésienne : $ax + by + c = 0$

Est $\vec{n}(a; b)$

1) (D) : $x - 2y + 5 = 0$: $\vec{n}(1; -2)$ un vecteur normal

2) (D) : $0x + 2y - 3 = 0$: $\vec{n}(0; 2)$ un vecteur normal

2) (D) : $1x + 0y - 1 = 0$: $\vec{n}(1; 0)$ un vecteur normal

Exercice5 : dans Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j})$ Considérons les points

$A(-3;0)$ et $B(3;0)$ et $C(1;5)$

1)déterminer une équation cartésienne de la droite (D) perpendiculaire à la droite (AB) passant par C

2)déterminer une équation cartésienne de la droite (Δ) parallèle à la droite (AB) passant par C

Solution : 1)soit M un point du plan $(\mathcal{P})$

$$M \in (D) \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow 6(x-1) - (y-5) = 0 \\ \Leftrightarrow 6x - y - 1 = 0$$

Donc : $(D): 6x - y - 1 = 0$

1)soit $M(x; y)$ un point du plan $(\mathcal{P})$

$$M \in (\Delta) \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \cdot \vec{n} = 0$$

Avec $\vec{n}$ un vecteur normal a la droite (AB)

Le vecteur : $\overrightarrow{AB}(6, -1)$ est un vecteur directeur de la droite (AB) et on a : $\vec{n}(1, 6)$

$$\text{On a donc : } M \in (\Delta) \Leftrightarrow (x-1) + 6(y-5) = 0 \\ \Leftrightarrow x + 6y - 31 = 0 \text{ Donc : } (\Delta): x + 6y - 31 = 0$$

Exercice6 : dans Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j})$ Considérons les points $A(1;2)$

et $B(-2;3)$ et $C(0;4)$

1)déterminer une équation cartésienne de la droite (D) médiatrice du segment $[AB]$

2)déterminer une équation cartésienne de la droite (Δ) la hauteur du triangle ABC passant par A

Solution : 1) $(D)/ ax + by + c = 0$

Avec $\overrightarrow{AB}(a, b)$ un vecteur normal a (D)

$$\overrightarrow{AB}(-3, 1) \text{ donc : } (D)/ -3x + y + c = 0$$

Or $I \in (D)$ I est le milieu du segment $[AB]$

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) \text{ donc } I\left(\frac{-1}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

$$\text{Donc : } -3\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{5}{2} + c = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2} + \frac{5}{2} + c = 0 \Leftrightarrow c = -4$$

Par suite : $(D)/ -3x + y - 4 = 0$

2) (Δ) la hauteur du triangle ABC passant par A

Donc : (Δ) perpendiculaire a (BC) passant par A

Donc $\overrightarrow{BC}(2, 1)$ un vecteur normal a (Δ) donc

$$(\Delta)/ 2x + y + c = 0 \text{ et on a } A \in (\Delta) \text{ donc}$$

$$2 \times 1 + 2 + c = 0 \Leftrightarrow c = -4$$

$$(\Delta)/ 2x + y - 4 = 0$$

Exercice7 : $(D) \quad 2x + 3y - 1 = 0$ et $(D') \quad \frac{3}{2}x - y + 4 = 0$

Etudier la position relative de (D) et (D')

Solution :

$\vec{n}(2; 3)$ est un vecteur normal de (D)

$\vec{n'}\left(\frac{3}{2}; -1\right)$ est un vecteur normal de (D')

$$\vec{n} \cdot \vec{n'} = 2 \times \frac{3}{2} + 3 \times (-1) = 3 - 3 = 0 \text{ donc } \vec{n} \perp \vec{n'}$$

donc $(D) \perp (D')$

Exercice8 : Soient la droite (D) d'équation :

$$(D): 3x + 4y + 5 = 0$$

1)Déterminer les coordonnées du point H la projection orthogonale de O sur (D)

2)calculer La distance du point O à la droite (D)

3)Déterminer les coordonnées du point O' le symétrique de O par rapport à la droite (D)

Solution : 1)puisque H est la projection orthogonale de O sur (D) alors H est le point d'intersection de la droite (D) et la droite (Δ) qui passe par O et perpendiculaire a (D) on va donc résoudre le système

$$\text{suivant : } \begin{cases} (D): 3x + 4y + 5 = 0 \\ (\Delta): 4x - 3y = 0 \end{cases} \text{ On trouve : } x = \frac{-3}{5} \text{ et}$$

$$y = \frac{-4}{5} \text{ donc } H\left(\frac{-3}{5}; \frac{-4}{5}\right)$$

Autre méthode : Soit $H(x_H; y_H)$ on a

$$H \in (D) \Leftrightarrow 3x_H + 4y_H + 5 = 0$$

$\overrightarrow{OH}$ est normal a la droite (D) donc colinéaire avec

$$\vec{u}(3; 4) \text{ Donc : } \exists k \in \mathbb{R} / \overrightarrow{OH} = k\vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = 3k \\ y_H = 4k \end{cases}$$

Pour déterminer x_H et y_H on va donc résoudre le

$$\text{système suivant : } \begin{cases} (1) x_H = 3k \\ (2) y_H = 4k \\ (3) 3x_H + 4y_H + 5 = 0 \end{cases}$$

On remplace (1) et (2) dans (3) on trouve :

$$k = \frac{-1}{5} \text{ Donc : } \begin{cases} x_H = \frac{-3}{5} \\ y_H = \frac{-4}{5} \end{cases}$$

$$2) d(O; (D)) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3 \times 0 + 4 \times 0 + 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{5}{5} = 1$$

3) O' le symétrique de O par rapport à la droite (D)
Donc H est le milieu du segment $[OO']$

Donc : $\overrightarrow{OH} = -\overrightarrow{HO'}$ on pose : $O'(x; y)$

$$\text{Donc : } \begin{cases} \frac{-3}{5} - x = \frac{3}{5} \\ \frac{-4}{5} - y = \frac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{6}{5} \\ y = -\frac{8}{5} \end{cases} \text{ Donc : } O'\left(-\frac{6}{5}; -\frac{8}{5}\right)$$

Exercice9: dans Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé et direct $\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j})$ Considérons les points

$A(1; -1)$ et $B(4; -1)$ et $C(-2; 2)$

1) Calculer : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et $\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$

2) en déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$

3) Calculer la surface du triangle ABC

4) déterminer une équation cartésienne de la hauteur du triangle ABC passant par A

5) déterminer une équation cartésienne de la bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$

Solution : 1) on a : $\overrightarrow{AB}(3; 0)$ et $\overrightarrow{AC}(-3; 3)$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \times (-3) + 0 \times 3 = -9$$

$$\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 9$$

2) soit α une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ on a :

$$\cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\|} \text{ et } \sin(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})}{\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\|}$$

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{3^2 + 0^2} = 3 \text{ et } AC = 3\sqrt{2}$$

$$\text{Donc : } \cos \alpha = \frac{-9}{9\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \text{ et } \sin \alpha = \frac{9}{9\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Donc : } \alpha = \frac{3\pi}{4}$$

$$3) \text{ on a : } S = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})| = \frac{9}{2} \text{ cm}^2$$

4) soit (Δ) la hauteur du triangle ABC passant par A

Donc : (Δ) perpendiculaire à (BC) passant par A

Donc $\overrightarrow{BC}(-6; 3)$ un vecteur normal à (Δ) donc

$(\Delta) : -6x + 3y + c = 0$ et on a $A(1; -1) \in (\Delta)$ donc

$$-6 \times 1 - 3 + c = 0 \Leftrightarrow c = 9$$

$$(\Delta) : -6x + 3y + 9 = 0 \text{ donc : } (\Delta) : 2x - y - 3 = 0$$

4) soit (D) la bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$

Pour Chaque point $M(x, y)$ de la droite (D)

$$\text{On a : } d(M; (AB)) = d(M; (AC))$$

$$\text{D'où } \frac{|y+1|}{\sqrt{0^2+1^2}} = \frac{|x+y|}{\sqrt{0^2+1^2}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}|y+1| = |x+y|$$

On remarque que (D) se trouve dans le demi plan tel

$$\text{que : } \begin{cases} y+1 \geq 0 \\ x+y \geq 0 \end{cases} \text{ donc : } \sqrt{2}(y+1) = x+y$$

donc : l'équation cartésienne de (D) est :

$$\begin{cases} x + (1 - \sqrt{2})y - \sqrt{2} = 0 \\ y + 1 \geq 0 \end{cases} \text{ (D) est une demi droite}$$

Exercice10 : déterminer l'équation cartésienne du cercle de centre $\Omega(-1; 2)$ et de rayon $r = 3$

Solution : l'équation cartésienne du cercle est :

$$\mathcal{C}(\Omega, r): (x+1)^2 + (y-2)^2 = 3^2$$

$$\text{C a d : } x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$$

Exercice11 : Déterminer L'ensemble (E) dans les cas suivants :

$$1) (E): x^2 + y^2 - x + 3y - 4 = 0$$

$$2) (E): x^2 + y^2 - 6x + 2y + 10 = 0$$

$$3) (E): x^2 + y^2 - 4x + 5 = 0$$

$$\text{Solutions : } 1) a = \frac{1}{2}; b = -\frac{3}{2}; c = -4$$

$$\text{On a : } a^2 + b^2 - c = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - (-4) = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} + 4 = \frac{13}{2} > 0$$

$$\text{Donc : } \Omega\left(\frac{-a}{2}; \frac{-b}{2}\right) \text{ donc } \Omega\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$$

$$R = \sqrt{a^2 + b^2 - c} = \frac{\sqrt{26}}{2}$$

alors (E) : est une cercle de centre

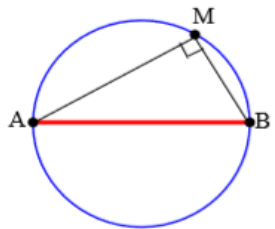
$$\Omega\left(\frac{1}{2}; \frac{-3}{2}\right) \text{ et de rayon } \frac{\sqrt{26}}{2}$$

$$2) a=3; b=-1; c=10 \quad a^2+b^2-c=3^2+(-1)^2-10=9+1-10=0$$

$$\text{alors } (E) = \{\Omega(3; -1)\}$$

$$3) a=2; b=0; c=5$$

Exercice12 : Déterminer une équation du cercle de diamètre $[AB]$ avec $A(1;2)$ et $B(-3;1)$



solution :

$$M(x; y) \in (C) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$$

$$\overrightarrow{MA}(1-x; 2-y) \text{ et}$$

$$\overrightarrow{MB}(-3-x; 1-y)$$

$$M(x; y) \in (C) \Leftrightarrow (-3-x)(1-x) + (1-y)(2-y) = 0$$

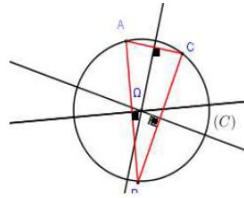
$$\text{Donc : } (C): x^2 + y^2 + 2x - 3y - 1 = 0$$

Exercice13 : le plan (P) est rapporté à un repère $\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j})$

orthonormé. Soient les points

$$A(2;3) \quad B(0;1); \quad C(-4;5);$$

$$E(5;2) \text{ et } F(2;4)$$



1) Ecrire l'équation du cercle circonscrit au Triangle ABC .

2) Ecrire l'équation du cercle circonscrit au triangle OEF.

Solution : 1) Soient $I(1;2)$ et $J(-1;4)$ le milieu respectivement du segments : $[AB]$ et $[AC]$
Et soit (Δ) la médiatrice de $[AB]$ donc (Δ) passe par $I(1;2)$ et $\overrightarrow{AB}$ un vecteur normal a (Δ)

Et on a : $\overrightarrow{AB}(-2;-2)$ donc une équation de (Δ) est :

$$(\Delta): -2(x-1) - 2(y-2) = 0$$

$$\text{Donc : } (\Delta): -2x + 2 - 2y + 4 = 0 \text{ donc } (\Delta): -2x - 2y + 6 = 0$$

$$\text{donc } (\Delta): x + y - 3 = 0 \text{ (après simplifications)}$$

Et soit (Δ') la médiatrice de $[AC]$ donc (Δ') passe par

$J(-1;4)$ et $\overrightarrow{AC}$ un vecteur normal a (Δ') et on a :

$\overrightarrow{AC}(-6;2)$ donc une équation de (Δ') est :

$$(\Delta'): -6(x+1) + 2(y-4) = 0 \text{ donc } (\Delta'): 3x - y + 7 = 0$$

On a Ω est le Centre du cercle circonscrit du triangle ABC donc le point d'intersection de (Δ) et (Δ') on va donc résoudre le système :

$$\begin{cases} (\Delta): x + y - 3 = 0 \\ (\Delta'): 3x - y + 7 = 0 \end{cases}$$

Et la solution de ce système est : $(-1;4)$ donc

$\Omega(-1;4)$ est le centre du cercle circonscrit du triangle

ABC et le rayon est : $r = A\Omega = \sqrt{(-1-2)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{10}$

Et l'équation du cercle est : $(x+1)^2 + (y-4)^2 = 10$

$$(C): x^2 + y^2 + 2x - 8y + 7 = 0$$

2) déterminons l'équation du cercle circonscrit au triangle OEF. On sait que l'équation du cercle s'écrit sous la forme : $(C'): x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$

Et on a : $O \in (C') \Leftrightarrow c = 0$

$$E(5;2) \in (C') \Leftrightarrow 25 + 4 - 10a - 4b = 0$$

$$F(2;4) \in (C') \Leftrightarrow 4 + 16 - 4a - 8b = 0$$

on va donc résoudre le système :

$$\begin{cases} 10a + 4b = 29 \\ a + 2b = 5 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{19}{8} \\ b = \frac{21}{16} \\ c = 0 \end{cases}$$

Et l'équation du cercle est :

$$(C'): x^2 + y^2 - \frac{19}{4}x - \frac{21}{8}y = 0$$

Exercice14: résoudre graphiquement le système :

$$(S) \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y + \frac{11}{4} < 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 4 > 0 \end{cases}$$

$$\text{Solution : } x^2 + y^2 - 2x - 4y + \frac{11}{4} = 0$$

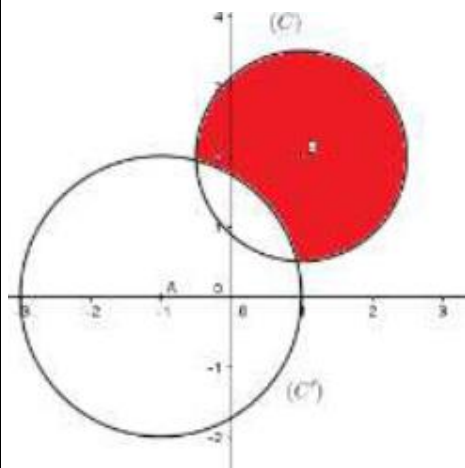
Est l'équation du cercle (C)

de centre $B(1,2)$ et de rayon $r = \frac{3}{2}$

$x^2 + y^2 + 2x - 4 = 0$ est l'équation du cercle (C')

de centre $A(-1,0)$ et de rayon $r' = 2$.

L'ensemble des points M qui vérifient (S) est l'extérieur de (C') intersection l'intérieur de (C)



Exercice15 : résoudre graphiquement le système :

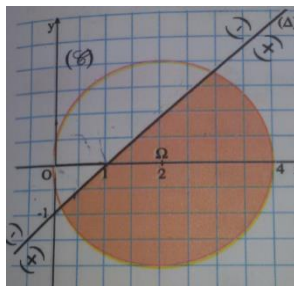
$$(S) \begin{cases} (1): x^2 + y^2 - 4x < 0 \\ (2): x - y - 1 > 0 \end{cases}$$

solution : $(1): x^2 + y^2 - 4x < 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 < 2^2$
Donc les solutions de cette inéquation c'est les couples $(x; y)$ des points qui se trouvent à l'intérieur du cercle (C) de centre $\Omega(2;0)$ et de rayon $r = 2$

• $(2): x - y - 1 > 0$: les solutions de cette inéquation c'est les couples $(x; y)$ des points qui se trouvent au-dessous de la droite d'équation : $(\Delta): x^2 + y^2 - 4x = 0$
(demi plan qui contient $\Omega(2;0)$)

Car : $2 - 0 - 1 = 1 > 0$

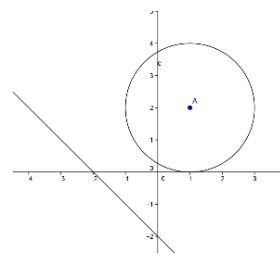
Finalement l'ensemble des solutions du système c'est les couples $(x; y)$ des points qui appartiennent à la partie colorée.



Exercice16 : Etudier la position du cercle de centre $\Omega(1;2)$ et de rayon $R = 2$ avec la droite d'équation $(D): x + y + 2 = 0$

Solution : on calcul $d(\Omega, (P))$?

$$d(\Omega, (P)) = \frac{|1+2+2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|5|}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} > R = 2$$



Donc : droite (D) est à l'extérieur du cercle (C)
 $(C) \cap (D) = \emptyset$

Exercice17 : Etudier la position du cercle (C) de centre $\Omega(1;2)$ et de rayon $R = 2$ avec la droite d'équation $(D): x - y + 2 = 0$

Solution on calcul $d(\Omega, (P))$?

$$d(\Omega, (P)) = \frac{|1-2+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{|1|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} < R = 2$$

Donc : le cercle (C) et la droite (D) se coupent en deux points A et B
Déterminons les coordonnées des points d'intersections ?

On va résoudre le système suivant :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1) (x-1)^2 + (y-2)^2 = 2^2 \\ (2) x - y + 2 = 0 \end{cases}$$

On a : $(2) \Leftrightarrow x + 2 = y$

On remplaçant dans (1) $y = x + 2$

On trouve : $(1) (x-1)^2 + (x+2-2)^2 = 2^2$

Donc : $(x-1)^2 + (x)^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + x^2 = 4$

Donc : $2x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \Delta = 28$

Donc : $x_1 = \frac{2+2\sqrt{7}}{4}$ et $x_2 = \frac{2-2\sqrt{7}}{4}$

Donc : $x_1 = \frac{1+\sqrt{7}}{2}$ et $x_2 = \frac{1-\sqrt{7}}{2}$

Si : $x_1 = \frac{1+\sqrt{7}}{2}$ on remplace dans $x + 2 = y$

On trouve : $y_1 = \frac{1+\sqrt{7}}{2} + 2 = \frac{5+\sqrt{7}}{2}$

Si : $x_2 = \frac{1-\sqrt{7}}{2}$ on

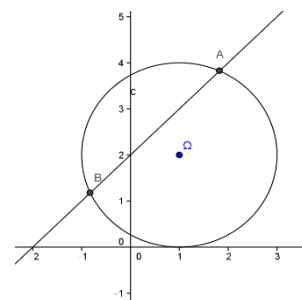
remplace dans $x + 2 = y$

On trouve :

$y_2 = \frac{1-\sqrt{7}}{2} + 2 = \frac{5-\sqrt{7}}{2}$

Donc : les points d'intersections sont :

$A\left(\frac{1+\sqrt{7}}{2}; \frac{5+\sqrt{7}}{2}\right)$ et $B\left(\frac{1-\sqrt{7}}{2}; \frac{5-\sqrt{7}}{2}\right)$



Exercice18 : Etudier la position du cercle (C) de centre $\Omega(1;2)$ et de rayon $R=1$ avec la droite d'équation (D): $y=3$

Solution on calcul $d(\Omega, (P))$?

$$(D): 0x+1y-3=0$$

$$d(\Omega, (P)) = \frac{|0+2-3|}{\sqrt{0^2+1^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{1}} = 1 = R$$

Donc : la droite (D) est tangente au cercle (C) en A
Déterminons les coordonnées du point d'intersection ou point de tangence ?

$$\text{L'équation de (C) est } (x-1)^2 + (y-2)^2 = 1^2$$

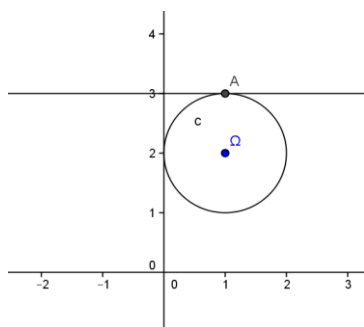
On va résoudre le système suivant :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1)(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1 \\ (2)y = 3 \end{cases}$$

On remplaçant dans $y=3$ dans (1)

On aura :

$$(1)(x-1)^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x-1=0$$



Donc : $x=1$ donc point de tangence est $A(1;3)$

Exercice19 : Soit (C) le cercle d'équation :

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0 \quad (1)$$

1) Vérifier que $A(0;1) \in (C)$

2) Ecrire l'équation de la tangente au cercle (C) en A.

Solution : 1) On a : $0^2 + 1^2 - 4 \times 0 - 2 \times 1 + 1 = 0$

Donc $A(0;1) \in (C)$

2) L'équation de la tangente au cercle (C) en A. ??

$$a=2; b=1; c=1 : a^2 + b^2 - c = 2^2 + 1^2 - 1 = 4 > 0$$

Donc (C) cercle de centre $\Omega(\frac{-a}{2}; \frac{-b}{2})$ cad $\Omega(2;1)$

$$\overrightarrow{A\Omega}(-2;0) \text{ et } \overrightarrow{AM}(x-0; y-1)$$

$$M(x; y) \in (D) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{A\Omega} = 0$$

$$-2(x-0) = 0 \Leftrightarrow -2(x-0) + 0(y-1) = 0 \Leftrightarrow M(x; y) \in (D)$$

$$M(x; y) \in (D) \Leftrightarrow x=0$$

Donc : L'équation de la tangente au cercle (C) en A est : (D): $x=0$

Exercice20 : Déterminer l'équation paramétrique du cercle (C) de centre $\Omega(1;-2)$ et de rayon $r=\sqrt{2}$

Solution : l'équation paramétrique du cercle (C) de centre $\Omega(1;-2)$ et de rayon $r=\sqrt{2}$ est :

$$\begin{cases} x = 1 + \sqrt{2} \cos \theta \\ y = -2 + \sqrt{2} \sin \theta \end{cases} \text{ avec } (\theta \in \mathbb{R})$$

Exercice21 : Déterminer l'ensemble (C) des points

$M(x; y)$ du plan tel que :

$$\begin{cases} x = 3 + \sqrt{3} \cos \theta \\ y = 1 + \sqrt{3} \sin \theta \end{cases} \text{ avec } (\theta \in \mathbb{R})$$

$$\text{Solution : } \begin{cases} x-3 = \sqrt{3} \cos \theta \\ y-1 = \sqrt{3} \sin \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 = \sqrt{3} \cos \theta \\ y-1 = \sqrt{3} \sin \theta \end{cases}$$

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = (\sqrt{3} \cos \theta)^2 + (\sqrt{3} \sin \theta)^2 \Leftrightarrow$$

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 3((\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2) \Leftrightarrow$$

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = \sqrt{3}^2$$

Donc l'ensemble (C) des points $M(x; y)$ du plan est le cercle (C) de centre $\Omega(3;1)$ et de rayon $R=\sqrt{3}$

Exercice22 : le plan (P) est rapporté à un repère

$\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j})$ orthonormé. (C) l'ensemble des points

$$M(x; y) \text{ du plan tel que : } \begin{cases} x = 2 + 2 \cos \theta \\ y = 2 \sin \theta \end{cases} \text{ avec } (\theta \in \mathbb{R})$$

1) montrer que (C) est le cercle (C) dont on déterminera de centre Ω et de rayon R et une équation cartésienne

2) soit le point $A(-1;0)$; montrer que A est à

l'extérieur du cercle (C) et déterminer les équations

des deux tangentes au cercle (C) passant par A

3) déterminer les équations des deux tangentes au cercle (C) et qui sont parallèles à la droite :

$$(D) : 3x - 4y = 0$$

4) a) soit la droite (Δ) d'équation : $y = x$

Montrer que (Δ) coupe le cercle (C) en deux points à déterminer

4b) déterminer graphiquement l'ensemble des points

$M(x; y)$ du plan tel que : $\frac{x^2+y^2}{4} \leq x \leq y$

Solution :1) $\begin{cases} x = 2 + 2 \cos \theta \\ y = 2 \sin \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 2 \cos \theta \\ y - 0 = 2 \sin \theta \end{cases}$

$$(x-2)^2 + (y-0)^2 = (2 \cos \theta)^2 + (2 \sin \theta)^2 \Leftrightarrow$$

$$(x-2)^2 + (y-0)^2 = 4((\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2) \Leftrightarrow$$

$$(x-2)^2 + (y-0)^2 = 2^2$$

Donc l'ensemble (C) des points $M(x; y)$ du plan est le cercle (C) de centre $\Omega(2; 0)$ et de rayon $R = 2$

2) $A(-1; 0)$; $(C) : (x-2)^2 + (y-0)^2 = 2^2$

On a : $(-1-2)^2 + (0-0)^2 - 4 = 9 - 4 > 0$ donc A est à l'extérieur du cercle (C)

Soit (T) une droite qui passe par A et tangente au cercle (C) et soit : $ax + by + c = 0$ une équation cartésienne de (T) avec $(a; b) \neq (0; 0)$

Puisque (T) est tangente au cercle (C) alors :

$$d(\Omega, (T)) = R \text{ cad } \frac{|2a + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 2 :$$

Et on a : $A \in (T)$ donc : $-a + c = 0$ donc on trouve :

$$b = \frac{a\sqrt{5}}{2} \text{ ou } b = -\frac{a\sqrt{5}}{2} \text{ et l'équation cartésienne de}$$

$$(T) \text{ est : } 2x - \sqrt{5}y + 2 = 0 \text{ ou } 2x + \sqrt{5}y + 2 = 0$$

Par suite les équations des deux tangentes au cercle (C) passant par A sont :

$$(T_1) : 2x - \sqrt{5}y + 2 = 0 \text{ ou } (T_2) : 2x + \sqrt{5}y + 2 = 0$$

3) $(D) : 3x - 4y = 0$ $\Omega(2; 0)$

Puisque $(T) \parallel (D)$ donc on pose :

$$(T) : 3x - 4y + c = 0 \text{ et } (T) \text{ tangentes au cercle } (C)$$

$$\text{Donc : } d(\Omega, (T)) = R \Leftrightarrow \text{cad } \frac{|6 + c|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 2 :$$

$$\Leftrightarrow \frac{|6 + c|}{5} = 2 \Leftrightarrow |6 + c| = 10 \Leftrightarrow 6 + c = 10 \text{ Ou } 6 + c = -10$$

$$c = 4 \text{ ou } c = -16$$

Donc les tangentes au cercle (C) sont :

$$(T_1') : 3x - 4y + 4 = 0 \text{ ou } (T_2') : 3x - 4y - 16 = 0$$

4a) on va résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-0)^2 = 2^2 \\ y = x \end{cases} \text{ donc : } y = x \text{ et } 2x^2 - 4x = 0$$

donc : $(x = 0 \text{ ou } x = 2)$ et $y = x$

donc : (Δ) coupe le cercle (C) aux points :

$O(0; 0)$ et $B(2; 2)$

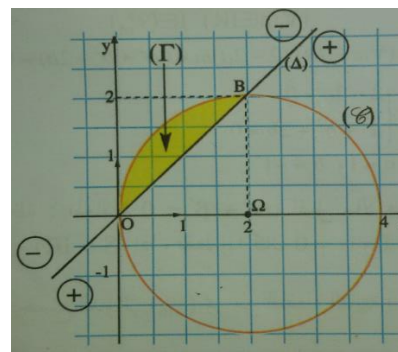
$$4b) \frac{x^2+y^2}{4} \leq x \leq y \Leftrightarrow \begin{cases} x - y \leq 0 \\ x^2 + y^2 - 4x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y \leq 0 \\ (x-2)^2 + y^2 - 4 \leq 0 \end{cases}$$

L'inéquation : $(x-2)^2 + y^2 - 4 \leq 0$ détermine

l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan qui se trouve à l'intérieur du cercle (C) ou sur le cercle (C)

Et L'inéquation : $x - y \leq 0$ détermine l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan qui se trouve au-dessus de la droite (Δ) ou sur la droite (Δ)

Voire la figure ci-dessus :



Exercice23: le plan (P) est rapporté à un repère

$\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j})$ orthonormé. Soient les points

$$A(3; 4) \quad B(4; 1); \quad C(2; -3)$$

1) montrer que les points A ; B et C sont non alignés

2) Ecrire l'équation du cercle (C) passant

par A ; B et C

Solution :: 1) on a : $\overline{AB}(1; -3)$ et $\overline{AC}(-1; -7)$

$$\det(\overline{AB}; \overline{AC}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -7 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$$

Donc les points A ; B et C sont non alignés

1) Soient $I(\frac{7}{2}; \frac{5}{2})$ et $J(3; -1)$ le milieu respectivement

du segments : $[AB]$ et $[BC]$

Et soit (D) la médiatrice de $[AB]$ donc (D) passe par

I et $\overline{AB}$ un vecteur normal à (D)

$$M(x; y) \in (D) \Leftrightarrow \overline{IM} \cdot \overline{AB} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{7}{2}\right) - 3\left(y - \frac{5}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 3y + 4 = 0$$

Donc : $(D): x-3y+4=0$

Et soit (Δ) la médiatrice de $[BC]$ donc (Δ) passe par J et $\overrightarrow{BC}$ un vecteur normal a (Δ)

$M(x;y) \in (\Delta) \Leftrightarrow \overrightarrow{JM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow x+2y-1=0$

Donc : $(\Delta): x+2y-1=0$ (après simplifications)

soit Ω est le Centre du cercle circonscrit du triangle ABC donc le point d'intersection de (Δ) et (D) on va

donc résoudre le système :
$$\begin{cases} x-3y+4=0 \\ x+2y-1=0 \end{cases}$$

Et la solution de ce système est : $\Omega(-1;1)$ donc

$\Omega(-1;1)$ est le centre du cercle circonscrit du triangle

ABC et le rayon est : $r = A\Omega = \sqrt{(3+1)^2 + (4-1)^2} = 5$

Et l'équation du cercle est : $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 25$

$(C): x^2 + y^2 + 2x - 2y - 23 = 0$

Exercice 24: le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère $\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j})$ orthonormé. (C_m) l'ensemble des points

$M(x;y)$ du plan tel que :

$(C_m): x^2 + y^2 - 2mx + 2y + 2m = 0$ avec m Paramètre réel

1) déterminer l'ensemble (C_1)

2) a) montrer que $\forall m \in \mathbb{R} - \{1\}$ (C_m) est un cercle dont déterminera le centre Ω_m et de rayon R_m

2) b) déterminer l'ensemble des centres Ω_m lorsque $m \in \mathbb{R} - \{1\}$

2) b) montrer que tous les cercles (C_m) passent par un point fixe I dont déterminera et tracer $(C_0); (C_2); (C_3)$

3) a) montrer que la droite $(\Delta): x=1$ est tangente A toutes les cercles (C_m)

3) b) soit $m > \frac{-3}{2}$ et $m \neq 1$ et le point $A(0;1)$

Vérifier que A est à l'extérieur des cercles (C_m) et que la droite (AI) n'est pas tangente aux cercles (C_m)

solution : 1) (C_1) ? pour $m=1$ on a :

$(C_1): x^2 + y^2 - 2x + 2y + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x-1=0$ et $y+1=0 \Leftrightarrow x=1$ et $y=-1$

Donc : (C_1) est le point $E(1;-1)$

2) a) $(C_m): x^2 + y^2 - 2mx + 2y + 2m = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-m)^2 + (y+1)^2 = (m-1)^2$

Donc : (C_m) est un cercle de centre $\Omega_m(m;-1)$ et de rayon $R_m = |m-1| \quad \forall m \in \mathbb{R} - \{1\}$

2) b) on pose : $x=m$ et $y=-1$ avec $m \in \mathbb{R} - \{1\}$

on a donc: l'ensemble des centres Ω_m lorsque $m \in \mathbb{R} - \{1\}$ est la droite d'équation : $y = -1$ privé du

Point $E(1;-1)$

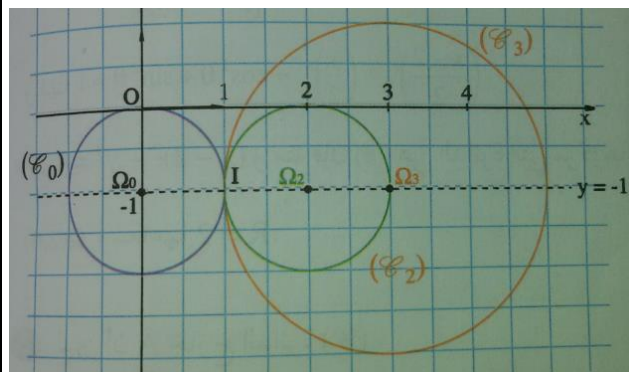
2) b) $I(a;b) \in (C_m) \quad \forall m \in \mathbb{R} - \{1\}$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ma + 2b + 2m = 0$

$\Leftrightarrow m(2-2a) + a^2 + b^2 + 2b = 0 \quad \forall m \in \mathbb{R} - \{1\}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-2a=0 \\ a^2 + b^2 + 2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=1 \text{ et } b=-1$ Donc : tous les

cercles (C_m) passent par un point fixe $I(1;-1)$



3) a) L'équation de (Δ) est : $x+0y-1=0$

Et $d(\Omega_m, (\Delta)) = \frac{|m-1|}{\sqrt{1^2+0^2}} = |m-1| = R_m$

Donc : la droite (Δ) est tangente a toutes les cercles (C_m) (on peut montrer que (Δ) coupe en (C_m) un point unique)

3) b) on a : $x^2 + y^2 - 2mx + 2y + 2m = 2m + 3$

Et puisque : $m > \frac{-3}{2}$ alors : $x^2 + y^2 - 2mx + 2y + 2m > 0$

donc A est à l'extérieur des cercles (C_m)

Montrons que : $d(\Omega_m, (AI)) = \frac{|2m-2|}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} R_m$

Donc : (AI) n'est pas tangente aux cercles (C_m)

Car : $\frac{2}{\sqrt{5}} R_m \neq R_m$