

**Cours de 1ere S Sciences expérimentale BIOF**

# **FONCTIONS - Généralités**

## **Leçon : FONCTIONS - Généralités**

### **Présentation globale**

- 1) Définitions d'une fonction et Domaine de définitions.
- 2) Fonctions paires et Fonctions impaires
- 3) Les variations d'une fonction numérique
- 4) Les variations d'une fonction et la parité d'une fonction
- 5) Les variations des deux fonctions :  $af$  et  $f+a$
- 6) comparer deux fonctions (fonctions positives et négatives) Fonctions majorées ; minorées ; bornée
- 7) Les extremaums d'une fonction numérique
- 8) Etude et représentation graphique de la fonction polynôme du 2iem degré:  $x \xrightarrow{f} ax^2 + bx + c$
- 9) Etude et représentation graphique de la fonction homographique :  $x \xrightarrow{f} \frac{ax+b}{cx+d}$
- 10) Etude et représentation graphique de la fonction polynôme:  $x \xrightarrow{f} ax^3$
- 11) Etude et représentation graphique de la fonction :  $x \xrightarrow{f} \sqrt{x+a}$
- 12) La composée de deux fonctions
- 13) Fonctions périodiques

## **1) Définitions d'une fonction et Domaine de définitions**

### **1-1) Définition :**

Une **fonction** est un procédé qui à un nombre  $x$  appartenant à un ensemble  $D$  associe un

nombre  $y$ . On note :  $x \xrightarrow{f} y$

ou encore  $f : x \mapsto y$

ou encore  $y = f(x)$

- On dit que  $y$  est l'image de  $x$  par la fonction  $f$
- On dit aussi que  $x$  est un antécédent de  $y$  par la fonction  $f$

### **1-2) Exemples**

#### **Exemple1 :**

a) Les fonctions numériques sont, le plus souvent, définies par une expression mathématique, comme par exemple :

$$f(x) = x^2 + 2x - 5 \quad \text{ou} \quad g(x) = \frac{3x^3 + 2x^2 - 1}{5x^2 - 4}.$$

$$\text{Ou } h(x) = \frac{2x-1}{5x-4} \quad \text{ou} \quad l(x) = \sqrt{x}$$

$$R(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\tan x}$$

*f* S'appelle une fonction polynôme

*g* S'appelle une fonction rationnelle

*h* S'appelle une fonction rationnelle et s'appelle aussi une fonction homographique

Une fonctions homographique s'écrit sous la

$$\text{forme : } h(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

*l* S'appelle la fonction racine carré

*R* S'appelle la fonction circulaire ou fonction trigonométrique

#### **Exemple2 :**

Soit la fonction  $f$  définie par ,  $f(x) = 3x^2 - 1$

1) Calculer l'image de 1 et  $\sqrt{2}$  et -1 par  $f$ .

2) Déterminer les antécédents éventuels de 2 par  $f$ ,

**Réponses :** 1)  $f(1) = 3 \times 1^2 - 1 = 3 - 1 = 2$  et

$$f(\sqrt{2}) = 3 \times (\sqrt{2})^2 - 1 = 6 - 1 = 4$$

$$f(-1) = 3 \times (-1)^2 - 1 = 3 - 1 = 2$$

2)  $f(x) = 2$  ssi  $3x^2 - 1 = 2$   
 ssi  $3x^2 = 3$  ssi  $x^2 = 1$   
 ssi  $x = -1$  ou  $x = 1$   
 donc les antécédents éventuels de 2 par f sont  $-1$  et  $1$

### 1-3) Domaine de définitions activités

a. On considère la fonction définie

$$\text{par : } x \xrightarrow{f} \frac{1}{x-3}$$

Parmi les valeurs suivantes, laquelle/lesquelles n'a/ont pas d'image par f ?  $0 ; 2 ; -3 ; 3$ .

b. On considère la fonction définie

$$\text{par : } x \xrightarrow{g} \sqrt{x-3}$$

Parmi les valeurs suivantes, laquelle/lesquelles n'a/ont pas d'image par g ?  $0 ; 2 ; -3 ; 4$ .

c. On considère la fonction définie

$$\text{par : } x \xrightarrow{h} \frac{1}{\sqrt{7-x}}$$

Parmi les valeurs suivantes, laquelle/lesquelles n'a/ont pas d'image par h ?  $5 ; -6 ; 9 ; 7$ .

#### Définition

Pour une fonction f donnée, l'ensemble de tous les nombres réels qui ont une image calculable par cette fonction est appelé ensemble de définition de la fonction f, que l'on notera D f

#### Exemple 1

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes définie par

$$1) \ f(x) = 3x^2 - x + 1. \quad 2) \ f(x) = \frac{x^3}{2x-4}.$$

$$3) \ f(x) = \frac{2x^4}{x^2-4}. \quad 4) \ f(x) = \frac{7x-1}{x^3-2x}.$$

$$5) \ f(x) = \sqrt{-3x+6}. \quad 6) \ f(x) = \frac{x-5}{2x^2-5x-3}.$$

$$7) \ f(x) = \sqrt{x^2-3x+2}. \quad 8) \ f(x) = \sqrt{\frac{-3x+9}{x+1}}.$$

$$9) \ f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{-2x^2+x+3}}. \quad 10) \ f(x) = \frac{|x-5|}{x^2+1}.$$

$$11) \ f(x) = \frac{\sqrt{|x|}}{x}. \quad 12) \ f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x-1}.$$

$$13) \ f(x) = 3x^2 - \frac{1}{x} + \sqrt{-x}.$$

$$14) \ f(x) = \frac{x}{|2x-4|-|x-1|}. \quad 15) \ f(x) = \frac{2 \sin x}{2 \cos x - 1}.$$

$$16) \ f(x) = \sqrt{\frac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6}}.$$

$$17) \ f(x) = \sqrt{x^2 + (2\sqrt{3}-\sqrt{2})x - 2\sqrt{6}}$$

$$18) \ f(x) = \frac{|x-4|-|x-1|}{x^2+2|x|-3}$$

$$19) \ f(x) = \sqrt{2x-1} + \sqrt{3-5x}.$$

#### Solutions

$$1) \ f(x) = 3x^2 - x + 1$$

f Est une fonction polynôme donc Un réel a toujours une image. Donc  $D_f = \mathbb{R}$

$$2) \ f(x) = \frac{x^3}{2x-4}.$$

Pour les fonctions du type fractions rationnelles, l'ensemble de définition est l'ensemble des nombres pour lesquels le dénominateur est non nul.

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2x-4 \neq 0\}$$

$$2x-4=0 \text{ ssi } x = \frac{4}{2} = 2 \text{ Donc } D_f = \mathbb{R} - \{2\}$$

On dira aussi que 2 est une valeur interdite pour la fonction f

$$3) \ f(x) = \frac{2x^4}{x^2-4}.$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2-4 \neq 0\}$$

$$x^2-4=0 \text{ ssi } x^2-2^2=0 \text{ ssi } (x-2)(x+2)=0$$

$$\text{ssi } x-2=0 \text{ ou } x+2=0 \text{ ssi } x=2 \text{ ou } x=-2 \text{ donc } D_f = \mathbb{R} - \{-2; 2\}$$

$$4) \ f(x) = \frac{7x-1}{x^3-2x}.$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^3-2x \neq 0\}$$

$$x^3-2x=0 \text{ ssi } x(x^2-2)=0 \text{ ssi } x=0 \text{ ou }$$

$$x^2-2=0 \text{ ssi } x=0 \text{ ou } x^2=2$$

$$\text{ssi } x=0 \text{ ou } x=\sqrt{2} \text{ ou } x=-\sqrt{2}$$

$$\text{donc } D_f = \mathbb{R} - \{-\sqrt{2}; 0; \sqrt{2}\}$$

$$5) \ f(x) = \sqrt{-3x+6}.$$

Pour les fonctions du type racine carrée, l'ensemble de définition est l'ensemble des nombres pour lesquels l'intérieur de la racine est positif

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / -3x+6 \geq 0\}$$

$$-3x+6 \geq 0 \text{ ssi } x \leq 2 \text{ ssi } x \leq \frac{-6}{-3} \text{ ssi } -3x \geq -6$$

$$\text{Donc } D_f = ]-\infty; 2]$$

$$6) \ f(x) = \frac{x-5}{2x^2-5x-3}.$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2x^2-5x-3 \neq 0\}$$

prof : atmani najib

$$2x^2 - 5x - 3 = 0 \quad a = 2 \text{ et } b = -5 \text{ et } c = -3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 25 + 24 = 49 = (7)^2 > 0$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{(-5) + \sqrt{49}}{2 \times 2} = \frac{7 + 5}{4} = \frac{12}{4} = 3 \quad \text{et}$$

$$x_2 = \frac{(-5) - \sqrt{49}}{2 \times 2} = \frac{5 - 7}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Donc  $D_f = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{2}; 3 \right\}$

7)  $f(x) = \sqrt{2x^2 - 3x + 1}$ .

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2x^2 - 3x + 1 \geq 0\}$  soit  $\Delta$  son discriminant

$$a = 2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 9 - 8 = 1 > 0$$

$$x_1 = \frac{-(-3) + \sqrt{1}}{2 \times 2} = \frac{4}{4} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-3) - \sqrt{1}}{2 \times 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$x$	$-\infty$	$1/2$	$1$	$+\infty$
$P(x)$	+	0	-	0

Donc  $D_f = \left[ -\infty, \frac{1}{2} \right] \cup [1, +\infty[$

8)  $f(x) = \sqrt{\frac{-9x+3}{x+1}}$ .

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{-9x+3}{x+1} \geq 0 \text{ et } x+1 \neq 0 \right\}$$

$$-9x+3=0 \text{ ssi } x=\frac{1}{3} \text{ ssi } -9x=-3$$

$$x+1=0 \text{ ssi } x=-1$$

$x$	$-\infty$	$-1$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$-9x+3$	+		+	0
$x+1$	-	0	+	
$\frac{-9x+3}{x+1}$	-		+	0

Donc  $D_f = \left[ -1, \frac{1}{3} \right]$

9)  $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{-2x^2+x+3}}$ .

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / -2x^2 + x + 3 > 0\}$$

$$-2x^2 + x + 3 = 0 \quad a = -2 \text{ et } b = 1 \text{ et } c = 3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times (-2) \times 3 = 1 + 24 = 25 = (5)^2 > 0$$

Donc on a deux racines

$$x_1 = \frac{-1+5}{2 \times (-2)} = \frac{4}{-4} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1-5}{2 \times (-2)} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$$

$x$	$-\infty$	$-1$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$-2x^2+x+3$	-	0	+	0

Donc  $D_f = \left[ -1, \frac{3}{2} \right]$

10)  $f(x) = \frac{|x-5|}{x^2+1}$ .  $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 1 \neq 0\}$

$$x^2 + 1 = 0 \text{ ssi } x^2 = -1$$

Cette équation n'admet pas de solution dans  $\mathbb{R}$

Donc  $D_f = \mathbb{R}$

11)  $f(x) = \frac{\sqrt{|x|}}{x}$ .

$f(x) \in \mathbb{R}$  ssi  $\sqrt{|x|} \in \mathbb{R}$  et  $x \neq 0$

Or on sait que  $|x| \geq 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$

Donc  $f(x) \in \mathbb{R}$  ssi  $x \neq 0$

Donc  $D_f = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$

12)  $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x-1}$ .  $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x+2 \geq 0 \text{ et } x-1 \neq 0\}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \geq -2 \text{ et } x \neq 1\}$$

$$D_f = [-2, 1[ \cup ]1, +\infty[$$

13)  $f(x) = 3x^2 - \frac{1}{x} + \sqrt{-x}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / -x \geq 0 \text{ et } x \neq 0\}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 0 \text{ et } x \neq 0\}$$

$$D_f = ]-\infty, 0[$$

14)  $f(x) = \frac{x}{|2x-4| - |x-1|}$ .

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / |2x-4| - |x-1| \neq 0\}$$

$$|2x-4| - |x-1| = 0 \text{ ssi } |2x-4| = |x-1|$$

$$\text{ssi } 2x-4 = x-1 \text{ ou } 2x-4 = -(x-1)$$

$$\text{ssi } 2x-x = 4-1 \text{ ou } 2x-4 = -x+1$$

$$\text{ssi } x=3 \text{ ou } 2x+x=4+1$$

$$\text{ssi } x=3 \text{ ou } 3x=5 \text{ ssi } x=3 \text{ ou } x=\frac{5}{3}$$

Donc :  $D_f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{5}{3}; 3 \right\}$

15)  $f(x) = \frac{2\sin x}{2\cos x - 1}$ .  $D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2\cos x - 1 \neq 0\}$

$$2\cos x - 1 = 0 \text{ ssi } \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \text{ ssi } \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

Donc:  $D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

16)  $f(x) = \sqrt{\frac{-2x^2 + 2x + 13}{x^2 - x - 6}}$

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / \frac{-2x^2 + 2x + 13}{x^2 - x - 6} \geq 0 \text{ et } x^2 - x - 6 \neq 0\right\}$$

- On détermine les racines du trinôme

$$-2x^2 + 2x + 13:$$

Le discriminant est  $\Delta' = 2^2 - 4 \times (-2) \times 13 = 108$  et ses racines sont :

$$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{108}}{2 \times (-2)} = \frac{1 + 3\sqrt{3}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-2 + \sqrt{108}}{2 \times (-2)} = \frac{1 - 3\sqrt{3}}{2}$$

- On détermine les racines du trinôme  $x^2 - x - 6$ :

Le discriminant est  $\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-6) \times 1 = 25$  et ses racines sont :

$$x_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{25}}{2 \times 1} = \frac{1 - 5}{2} = -2 \text{ et }$$

$$x_2 = \frac{-(-1) + \sqrt{25}}{2 \times 1} = \frac{1 + 5}{2} = 3$$

- On obtient le tableau de signe :

$x$	$-\infty$	$\frac{1-3\sqrt{3}}{2}$	$-2$	$3$	$\frac{1+3\sqrt{3}}{2}$	$+\infty$
$-2x^2 + 2x + 13$	-	0	+	+	+	0
$x^2 - x - 6$	+	+	0	-	0	+
$\frac{-2x^2 + 2x + 13}{x^2 - x - 6}$	-	0	+	-	+	0

$$D_f = \left[ \frac{1-3\sqrt{3}}{2}; -2 \right] \cup \left[ 3; \frac{1+3\sqrt{3}}{2} \right].$$

17)  $f(x) = \sqrt{x^2 + (2\sqrt{3} - \sqrt{2})x - 2\sqrt{6}}$

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / x^2 + (2\sqrt{3} - \sqrt{2})x - 2\sqrt{6} \geq 0\right\}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 - 4 \times 1 \times 2\sqrt{6}$$

$$\Delta = 12 - 4\sqrt{6} + 2 + 8\sqrt{6} = 14 + 4\sqrt{6}$$

$$14 + 4\sqrt{6} = 14 + 2 \times 2\sqrt{3} \times \sqrt{2} = (2\sqrt{3})^2 + 2 \times 2\sqrt{3} \times \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2$$

$$14 + 4\sqrt{6} = (2\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$$

On a  $\Delta = 14 + 4\sqrt{6} > 0$  donc

$$x_1 = \frac{-2\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{14 + 4\sqrt{6}}}{2 \times 1} = \frac{-2\sqrt{3} + \sqrt{2} + |2\sqrt{3} + \sqrt{2}|}{2 \times 1}$$

et  $x_2 = \frac{-2\sqrt{3} + \sqrt{2} - |2\sqrt{3} + \sqrt{2}|}{2 \times 1}$

$$x_1 = \frac{-2\sqrt{3} + \sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2 \times 1} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \quad \text{et}$$

$$x_2 = \frac{-2\sqrt{3} + \sqrt{2} - 2\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2 \times 1} = \frac{-4\sqrt{3}}{2} = -2\sqrt{3}$$

$x$	$-\infty$	$-2\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$x^2 + (2\sqrt{3} - \sqrt{2})x - 2\sqrt{6}$	+	0	-	0

On a donc :  $D_f = ]-\infty; -2\sqrt{3}] \cup [\sqrt{2}; +\infty[$

18)  $f(x) = \frac{|x-4| - |x-1|}{x^2 + 2|x|-3}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 2|x| - 3 \neq 0\}$$

$$x^2 + 2|x| - 3 = 0 \Leftrightarrow |x|^2 + 2|x| - 3 = 0 \text{ on pose}$$

$|x| = X$  donc l'équation devient :

$$X^2 + 2X - 3 = 0$$

Le discriminant est  $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$  et ses solutions sont :

$$X_1 = \frac{-2 - \sqrt{16}}{2 \times 1} = -3 \text{ et } X_2 = \frac{-2 + \sqrt{16}}{2 \times 1} = 1$$

Donc on a :  $|x| = -3$  et  $|x| = 1$

$|x| = -3$  n'a pas de solution

$|x| = 1 \Leftrightarrow x = 1$  ou  $x = -1$  donc  $D_f = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$

19)  $f(x) = \sqrt{2x-1} + \sqrt{3-5x}$ .

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2x - 1 \geq 0 \text{ et } 3 - 5x \geq 0\}$$

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / x \geq \frac{1}{2} \text{ et } x \leq \frac{3}{5}\right\}$$

Donc  $D_f = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right]$

## 2) Fonctions paires et Fonctions impaires

### 2.1 Définitions

#### a. Ensemble de définition centré

Soit  $f$  une fonction. Soit  $D_f$  son ensemble de définition : On dit que  $D_f$  est un ensemble de définition centré si et seulement si :

Pour tout réel  $x$ , si  $x \in D_f$ , alors  $-x \in D_f$ .

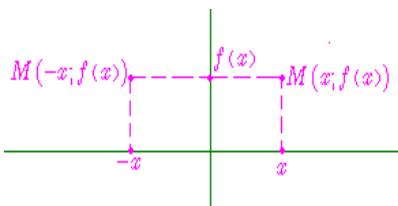
prof : atmani najib

Exemples d'ensembles centrés	Exemples d'ensembles non centrés
$]-\infty, +\infty[$	$]0, +\infty[$
${}^\circ * \cup {}^\circ -\{0\}$	${}^\circ -\{1\}$
${}^\circ -\{-1; 1\}$	${}^\circ -\{-1; 2\}$
$[-4; 4]$	$[-4; 3]$

## 2.2. Fonction paire

On dit qu'une fonction  $f$  est paire si et seulement si :

1. Son ensemble de définition est centré
2. Pour tout réel  $x$  de  $D_f$ , on a :  $f(-x) = f(x)$



### Remarques :

- si  $n$  est un entier pair, positif ou négatif, la fonction définie par  $f(x) = kx^n$  est paire.  
(c'est d'ailleurs de cet exemple que vient la dénomination de fonction paire)
- la fonction  $x \mapsto |x|$  est une fonction paire,
- la fonction  $x \mapsto \cos(x)$  est une fonction paire,
- l'opposée d'une fonction paire est une fonction paire,
- l'inverse d'une fonction paire est une fonction paire,
- la somme de deux fonctions paires est une fonction paire,
- le produit de 2 fonctions paires ou de 2 fonctions impaires est une fonction paire.

## 2.3. Fonction impaire

On dit qu'une fonction  $f$  est impaire si et seulement si :

1. Son ensemble de définition est centré,
2. Pour tout réel  $x$  de  $D_f$ , on a :  $f(-x) = -f(x)$

### Remarques :

- si  $n$  est un entier impair, positif ou négatif, la fonction  $x \mapsto kx^n$  est impaire,
- la fonction  $x \mapsto \sin(x)$  est impaire,
- la fonction  $x \mapsto \tan x$  est impaire,
- l'opposée d'une fonction impaire est une fonction impaire,
- l'inverse d'une fonction impaire est une fonction impaire,
- la somme de deux fonctions impaires est une fonction impaire,

prof : atmani najib

- le produit d'une fonction paire et d'une fonction impaire est une fonction impaire.

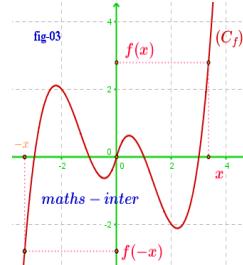
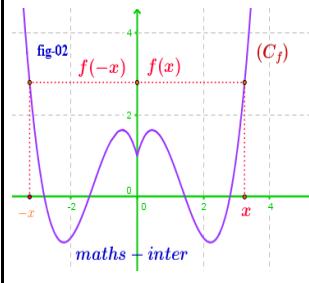
- la courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.

## 2.4 le graphe et la parité de la fonction

- la courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- la courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.

### Fonction paire

### Fonction impaire



### Exemple 1 :

- 1) Soit  $f$  une fonction tq :  $f(x) = 3x^2 - 5$

Donc  $D_f = \mathbb{R}$  car  $f$  est une fonction polynôme

- Pour tout réel  $x$ , si  $x \in \mathbb{R}$ , alors  $-x \in \mathbb{R}$
- $f(-x) = 3(-x)^2 - 5 = 3x^2 - 5$
- $f(-x) = f(x)$

Donc  $f$  est une fonction paire,

- 2) Soit  $g$  une fonction tq :  $g(x) = \frac{3}{x}$
- on a  $g(x) \in \mathbb{R}$  ssi  $x \neq 0$

donc  $D_g = \mathbb{R}^*$

- Pour tout réel  $x$ , si  $x \in \mathbb{R}^*$ , alors  $-x \in \mathbb{R}^*$
- $g(-x) = \frac{3}{-x} = -\frac{3}{x}$
- $g(-x) = -g(x)$

Donc  $g$  est une fonction impaire,

- 3) Soit  $h$  une fonction tq :  $h(x) = 2x^3 + x^2$

$h$  est une fonction polynôme donc Un réel a toujours une image. Donc  $D_h = \mathbb{R}$

- Pour tout réel  $x$ , si  $x \in \mathbb{R}$ , alors  $-x \in \mathbb{R}$
- $h(-x) = 2(-x)^3 + (-x)^2 = -2x^3 + x^2$
- $h(-x) = -(2x^3 - x^2) \neq -h(x)$

Donc  $h$  est une fonction ni paire ni impaire,

- 4) Soit  $t$  une fonction tq :  $t(x) = \frac{x}{x-2}$

on a  $t(x) \in \mathbb{R}$  ssi  $x-2 \neq 0$  ssi  $x \neq 2$

Donc  $D_t = \mathbb{R} - \{2\}$

on a  $-2 \in D_f$  mais  $-(-2) = 2 \notin D_f$

Donc  $D_f$  n'est pas symétrique par rapport à  $O$

Donc  $f$  est une fonction ni paire ni impaire,

### Exemple 2 :

Etudier la parité des fonctions suivantes définies par :

$$1) f(x) = \frac{x^2 - 1}{x} . \quad 2) f(x) = x^2 + \frac{1}{x} .$$

$$3) f(x) = \frac{|x|}{x^2 - 1} . \quad 4) f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

$$5) f(x) = \frac{2x^3}{x^2 + 5} . \quad 6) f(x) = |x| - \sqrt{2x^2 + 4} .$$

$$7) f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2} .$$

**Solutions :** 1)  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$

on a  $f(x) \in \mathbb{R}$  ssi  $x \neq 0$  donc  $D_f = \mathbb{R}^*$

- Pour tout réel  $x$ , si  $x \in \mathbb{R}^*$ , alors  $-x \in \mathbb{R}^*$

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 1}{-x} = -\frac{x^2 - 1}{x}$$

$$f(-x) = -f(x)$$

Donc  $f$  est une fonction impaire,

$$2) f(x) = x^2 + \frac{1}{x} \text{ on a } f(x) \in \mathbb{R} \text{ ssi } x \neq 0$$

donc  $D_f = \mathbb{R}^*$

- Pour tout réel  $x$ , si  $x \in \mathbb{R}^*$ , alors  $-x \in \mathbb{R}^*$

$$f(-x) = (-x)^2 + \frac{1}{-x} = x^2 - \frac{1}{x} = \left( -x^2 + \frac{1}{x} \right)$$

$$f(-x) \neq -f(x)$$

Donc  $f$  est une fonction ni paire ni impaire,

$$3) f(x) = \frac{|x|}{x^2 - 1} \text{ on a } f(x) \in \mathbb{R} \text{ ssi } x^2 - 1 \neq 0$$

$$x^2 - 1 = 0 \text{ ssi } x^2 = 1 \text{ ssi } x = 1 \text{ ou } x = -1$$

donc  $D_f = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$

- Pour tout réel  $x$ , si  $x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$ , alors

$$-x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$$

$$f(-x) = \frac{|-x|}{(-x)^2 - 1} = \frac{|x|}{x^2 - 1}$$

$$f(-x) = f(x)$$

Donc  $f$  est une fonction paire

$$4) f(x) = \sqrt{1 - x^2} .$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 1 - x^2 \geq 0\}$$

$$1 - x^2 = 0 \text{ ssi } x^2 = 1 \text{ ssi } x = 1 \text{ ou } x = -1$$

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$
$1 - x^2$	-	0	+	0

Donc  $D_f = [-1, 1]$

- Pour tout réel  $x$ , si  $x \in [-1, 1]$ , alors

$$-x \in [-1, 1]$$

$$\begin{aligned} -f(-x) &= \sqrt{1 - (-x)^2} = \sqrt{1 - x^2} \\ f(-x) &= f(x) \end{aligned}$$

Donc  $f$  est une fonction paire

$$5) f(x) = \frac{2x^3}{x^2 + 5} .$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 5 \neq 0\}$$

$$x^2 + 5 = 0 \text{ ssi } x^2 = -5 \text{ pas de solutions}$$

Donc  $D_f = \mathbb{R}$

- Pour tout réel  $x$ , si  $x \in \mathbb{R}$ , alors  $-x \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = \frac{2(-x)^3}{(-x)^2 + 5} = \frac{-2x^3}{x^2 + 5}$$

$$f(-x) = -f(x)$$

Donc  $f$  est une fonction impaire

$$6) f(x) = |x| - \sqrt{2x^2 + 4} .$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2x^2 + 4 \geq 0\}$$

Or on sait que  $2x^2 \geq 0$  Pour tout réel  $x$ , donc  $2x^2 + 4 \geq 0 + 4$  donc  $2x^2 + 4 \geq 4 \geq 0$

Donc  $D_f = \mathbb{R}$

- Pour tout réel  $x$ , si  $x \in \mathbb{R}$ , alors  $-x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(-x) &= |-x| - \sqrt{2(-x)^2 + 4} = |x| - \sqrt{2x^2 + 4} \\ f(-x) &= f(x) \end{aligned}$$

Donc  $f$  est une fonction paire

$$7) f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2} . \quad D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\} \text{ Donc}$$

$$D_f = \mathbb{R}^+ = [0; +\infty[$$

On a  $2 \in \mathbb{R}^+$  mais  $-2 \notin \mathbb{R}^+$  Donc  $f$  est une fonction ni paire ni impaire

**Exemple 3 :** Soit la fonction définie par :

$$5f(x) + f(-x) = 2x^3 - 3x \text{ Pour tout réel } x$$

1) montrer que  $f$  est une fonction impaire

2) donner une expression de  $f(x)$  Pour tout réel  $x$

**Solution :** soit  $x \in \mathbb{R}$

$$\text{On a } 5f(x) + f(-x) = 2x^3 - 3x \quad (1)$$

Pour tout réel  $x$

On remplaçant  $x$  par  $-x$  on trouve :

$$5f(-x) + f(x) = 2(-x)^3 - 3(-x)$$

$$\text{Donc : } 5f(-x) + f(x) = -2x^3 + 3x \quad (2)$$

$$(1) + (2) \text{ donne : } 6(f(-x) + f(x)) = 0 \text{ donc :}$$

$$f(-x) + f(x) = 0$$

$$\text{donc : } f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Donc  $f$  est une fonction impaire

$$2) \text{on a : } 5f(x) + f(-x) = 2x^3 - 3x$$

Et puisque  $f$  est une fonction impaire donc :

$$5f(x) - f(x) = 2x^3 - 3x$$

$$4f(x) = 2x^3 - 3x \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}$$

**Exemple 4 :** Soit la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{|x|+1}{2|x|-3} \text{ et } (C_f) \text{ la courbe de } f \text{ Dans le}$$

repère  $(0; \vec{i}; \vec{j})$  orthonormé

Montrer que  $(C_f)$  symétrique par rapport à l'axe des ordonnées

$$\text{Solution : } D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / 2|x| - 3 \neq 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} / |x| \neq \frac{3}{2} \right\}$$

$$\text{Donc : } D_f = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\}$$

Il suffit de montrer que  $f$  est une fonction paire

- Pour tout réel  $x$ , si  $x \in \mathbb{R} - \left\{ -\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\}$  alors

$$-x \in \mathbb{R} - \left\{ -\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\}$$

$$-f(-x) = \frac{|-x|+1}{2|-x|-3} = \frac{|x|+1}{2|x|-3} = f(x)$$

Donc  $f$  est une fonction paire

Par suite la  $(C_f)$  symétrique par rapport à l'axe des ordonnées

### 3) Les variations d'une fonction numérique

**3-1) Sens de variation d'une fonction :** fonction croissante - décroissante - fonction constantes

**Définition :** Soit  $f$  une fonction et  $D_f$  son domaine de définition

Et soit  $I$  un intervalle inclus dans  $D_f$

prof : atmani najib

- Dire  $f$  que est strictement croissante sur  $I$  ( $\text{croissante sur } I$ ) signifie que :

Si  $x_1 \in I$  et  $x_2 \in I$  tq  $x_1 < x_2$  alors

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (f(x_1) \leq f(x_2))$$

Rq : Une fonction croissante « conserve l'ordre ».

- Dire  $f$  que est strictement décroissante sur  $I$  ( $\text{décroissante sur } I$ ) signifie que :

Si  $x_1 \in I$  et  $x_2 \in I$  tq  $x_1 < x_2$  alors

$$f(x_1) > f(x_2) \quad (f(x_1) \geq f(x_2))$$

Rq : Une fonction décroissante « inverse l'ordre ».

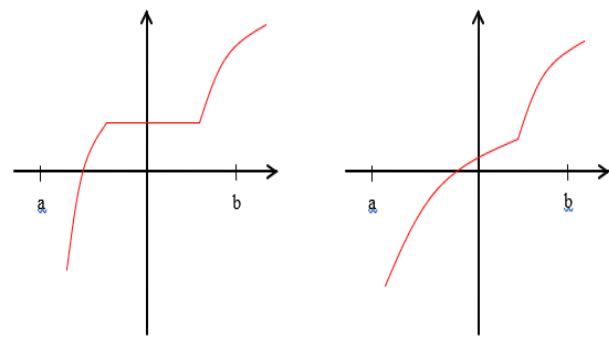
- Dire  $f$  que est constante sur  $I$  signifie que :

Si  $x_1 \in I$  et  $x_2 \in I$  tq  $x_1 < x_2$

$$\text{alors } f(x_1) = f(x_2)$$

- Une fonction définie sur un intervalle  $I$  est monotone sur cet intervalle si elle est : soit croissante sur  $I$  soit décroissante sur  $I$

### Illustration graphique :



Fonction croissante sur  $[a,b]$ , mais non strictement croissante

Fonction strictement croissante sur  $[a,b]$

**Exemples :** 1) Soit  $f$  une fonction tq :

$$f(x) = 7x - 5$$

$f$  est une fonction polynôme donc  $D_f = \mathbb{R}$

Soit  $x_1 \in \mathbb{R}$  et  $x_2 \in \mathbb{R}$  tq  $x_1 < x_2$

Donc  $7x_1 < 7x_2$  car  $7 > 0$

Donc  $7x_1 - 5 < 7x_2 - 5$

Alors  $f(x_1) < f(x_2)$  d'où  $f$  que est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$

2) Soit  $g$  une fonction tq :  $g(x) = \frac{2}{x}$

$g(x) \in \mathbb{R}$  ssi  $x \neq 0$  Donc  $D_g = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$

a) Soit  $x_1 \in [0; +\infty[$  et  $x_2 \in [0; +\infty[$  tq  $x_1 < x_2$

Donc  $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$  Donc  $\frac{2}{x_1} > \frac{2}{x_2}$  car  $2 > 0$

Alors  $f(x_1) > f(x_2)$  d'où f que est strictement décroissante sur  $[0; +\infty[$

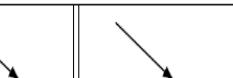
b) Soit  $x_1 \in ]-\infty; 0]$  et  $x_2 \in ]-\infty; 0]$  tq  $x_1 < x_2$

Donc  $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$  Donc  $\frac{2}{x_1} > \frac{2}{x_2}$  car  $2 > 0$

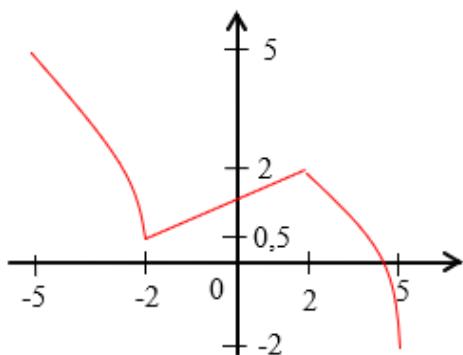
Alors  $f(x_1) > f(x_2)$  d'où f que est strictement décroissante sur  $]-\infty; 0]$

b) tableau de variation :

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f(x)$			



3)



$x$	-5	-2	2	5
$f(x)$	5	0,5	2	-2

**Propriété :** Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I

On dit que f est strictement croissante sur I

ssi il existe un réel k tq:  $f(x) = k$

pour tout  $x \in I$

### 3-2) Le taux d'accroissement d'une fonction

a) **Définition :** Soit f une fonction et  $D_f$  son domaine de définition

Et soient  $x_1 \in D_f$  et  $x_2 \in D_f$  tq  $x_1 \neq x_2$

On appelle Le taux d'accroissement (taux de variation) de la fonction f entre  $x_1$  et  $x_2$

Le réel noté  $T(x_1; x_2)$  est tq :

$$T(x_1; x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

**Exemple :** Soit f une fonction tq :

$$f(x) = 3x^2 + 2$$

f est une fonction polynôme donc  $D_f = \mathbb{R}$

soient  $x_1 \in \mathbb{R}$  et  $x_2 \in \mathbb{R}$  tq  $x_1 \neq x_2$

$$T(x_1; x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(3x_1^2 + 2) - (3x_2^2 + 2)}{x_1 - x_2}$$

$$T(x_1; x_2) = \frac{3x_1^2 - 3x_2^2 + 2 - 2}{x_1 - x_2} = \frac{3(x_1^2 - x_2^2)}{x_1 - x_2}$$

$$T(x_1; x_2) = \frac{3(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{x_1 - x_2} = 3(x_1 + x_2)$$

### b) Le taux d'accroissement d'une fonction et les variations :

**Propriété :** Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I

- On dit que f est strictement croissante(croissante) sur I ssi pour tout  $x_1 \in I$  et  $x_2 \in I$  et  $x_1 \neq x_2$  on a  $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$

$$\left( \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \geq 0 \right)$$

- On dit que f est strictement décroissante(décroissante) sur I ssi pour tout  $x_1 \in I$  et  $x_2 \in I$  et  $x_1 \neq x_2$  on a  $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$  ( $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq 0$ )

- On dit que f est constante sur I ssi pour tout  $x_1 \in I$  et  $x_2 \in I$  et  $x_1 \neq x_2$  on a

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = 0$$

**Exemples :**

1) Soit f une fonction tq :  $f(x) = 3x^2 + 2$

$$D_f = \mathbb{R}$$

soient  $x_1 \in \mathbb{R}$  et  $x_2 \in \mathbb{R}$  tq  $x_1 \neq x_2$  on a :

$$T(x_1; x_2) = 3(x_1 + x_2)$$

a) Soit  $x_1 \in [0; +\infty[$  et  $x_2 \in [0; +\infty[$

Donc  $x_1 \geq 0$  et  $x_2 \geq 0$  Donc  $x_1 + x_2 \geq 0$

Donc  $3(x_1 + x_2) \geq 0$  car  $3 > 0$

Donc  $T(x_1; x_2) = 3(x_1 + x_2) \geq 0$

d'où  $f$  que est croissante sur  $[0; +\infty[$

b) Soit  $x_1 \in ]-\infty; 0]$  et  $x_2 \in ]-\infty; 0]$

Donc  $x_1 \leq 0$  et  $x_2 \leq 0$  Donc  $x_1 + x_2 \leq 0$

Donc  $3(x_1 + x_2) \leq 0$  car  $3 > 0$

Donc  $T(x_1; x_2) = 3(x_1 + x_2) \leq 0$

d'où  $f$  que est décroissante sur  $]-\infty; 0]$

b) Résumé : tableau de variation :

$$f(0) = 3 \times 0^2 + 2 = 2$$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f(x)$		$2$	

2) Soit  $f$  une fonction tq :  $g(x) = \frac{x}{x+1}$  on

a)  $f(x) \in \mathbb{R}$  ssi  $x+1 \neq 0$  ssi  $x \neq -1$

Donc  $D_g = \mathbb{R} - \{-1\}$

soient  $x_1 \in D_g$  et  $x_2 \in D_g$  tq  $x_1 \neq x_2$  on a :

$$T(x_1; x_2) = \frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2}$$

$$g(x_1) - g(x_2) = \frac{x_1}{x_1+1} - \frac{x_2}{x_2+1} = \frac{x_1(x_2+1) - x_2(x_1+1)}{(x_1+1)(x_2+1)}$$

$$T(x_1; x_2) = \frac{x_1 - x_2}{(x_1+1)(x_2+1)} \times \frac{1}{x_1 - x_2} = \frac{1}{(x_1+1)(x_2+1)}$$

a) sur  $I = ]-\infty; -1[$

Soit  $x_1 \in ]-\infty; -1[$  et  $x_2 \in ]-\infty; -1[$   $x_1 \neq x_2$

Donc  $x_1 < -1$  et  $x_2 < -1$  Donc  $x_1 + 1 < 0$  et

$x_2 + 1 < 0$  Donc  $(x_1 + 1)(x_2 + 1) > 0$

$$\text{Donc } T(x_1; x_2) = \frac{1}{(x_1+1)(x_2+1)} > 0 \text{ sur}$$

$I = ]-\infty; -1[$

d'où  $f$  que est strictement croissante sur  $I = ]-\infty; -1[$

b) sur  $J = ]-1; +\infty[$

Soit  $x_1 \in ]-1; +\infty[$  et  $x_2 \in ]-1; +\infty[$   $x_1 \neq x_2$

Donc  $x_1 > -1$  et  $x_2 > -1$  Donc  $x_1 + 1 > 0$

et  $x_2 + 1 > 0$  Donc  $(x_1 + 1)(x_2 + 1) > 0$

Donc  $T(x_1; x_2) = \frac{1}{(x_1+1)(x_2+1)} > 0$

sur  $J = ]-1; +\infty[$

d'où  $f$  que est strictement croissante sur  $J = ]-1; +\infty[$

c) Résumé : tableau de variation :

$x$	$-\infty$	$-1$	$+\infty$
$f(x)$			

### 3-3) les variations et la parité :

**Propriété :** Soit  $f$  une fonction numérique définie sur un intervalle  $I \subset \mathbb{R}^+$  et soit  $I'$  le symétrique de l'intervalle  $I$

Si  $f$  est paire alors :

- $f$  est croissante sur  $I$  ssi  $f$  est décroissante sur  $I'$

- $f$  est décroissante sur  $I$  ssi  $f$  est croissante sur  $I'$

Si  $f$  est impaire alors :

- $f$  est croissante sur  $I$  ssi  $f$  est croissante sur  $I'$

- $f$  est décroissante sur  $I$  ssi  $f$  est décroissante sur  $I'$

**Consequences :**

Si  $f$  est paire ou impaire alors il suffit d'étudier ses variations sur  $D_f \cap \mathbb{R}^+$  et en déduire ses variations sur  $D_f$

**Exemple :** Soit  $f$  une fonction tq :  $f(x) = x + \frac{1}{x}$

1) Déterminer  $D_f$  et étudier la parité de  $f$

2) Calculer Le taux d'accroissement  $T(x_1; x_2)$  de  $f$  entre  $x_1$  et  $x_2$  deux éléments de  $D_f$  tq  $x_1 \neq x_2$

3) Étudier les variations de  $f$  sur  $I = ]0; 1]$  puis sur  $J = [1; +\infty[$

4) En déduire les variations de  $f$  sur  $D_f$

5) Dresser le tableau de variations de  $f$  sur  $D_f$

**Réponses :** 1) on a  $f(x) \in \mathbb{R}$  ssi  $x \neq 0$  Donc

$$D_f = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$$

- Pour tout réel  $x$ , si  $x \in \mathbb{R}^*$ , alors  $-x \in \mathbb{R}^*$

$$- f(-x) = -x + \frac{1}{-x} = -x - \frac{1}{x} = -\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$f(-x) = -f(x)$$

Donc  $f$  est une fonction impaire,

$$2) f(x_1) - f(x_2) = \left( x_1 + \frac{1}{x_1} \right) - \left( x_2 + \frac{1}{x_2} \right) = x_1 + \frac{1}{x_1} - x_2 - \frac{1}{x_2}$$

$$= \frac{x_1^2 \times x_2 + x_2 - x_2^2 \times x_1 - x_1}{x_1 \times x_2} = \frac{x_1 \times x_2 (x_1 - x_2) + x_2 - x_1}{x_1 \times x_2}$$

$$= \frac{(x_1 - x_2)(x_1 \times x_2 - 1)}{x_1 \times x_2}$$

$$T(x_1; x_2) = \frac{(x_1 - x_2)(x_1 \times x_2 - 1)}{x_1 \times x_2} \times \frac{1}{x_1 - x_2} = \frac{x_1 \times x_2 - 1}{x_1 \times x_2}$$

a) sur  $I = [0; 1]$  Soit  $x_1 \in [0; 1]$  et  $x_2 \in [0; 1]$

Donc  $0 < x_1 \leq 1$  et  $0 < x_2 \leq 1$   $x_2 + 1 > 0$

Donc  $0 < x_1 x_2 \leq 1$  et  $x_1 \neq x_2$  Donc  $x_1 x_2 - 1 < 0$

et on a  $0 < x_1 x_2$  Donc  $T(x_1; x_2) = \frac{x_1 \times x_2 - 1}{x_1 \times x_2} < 0$

d'où  $f$  que est strictement décroissante sur  $I = [0; 1]$

b) sur  $J = [1; +\infty[$  Soit  $x_1 \in [1; +\infty[$  et  $x_2 \in [1; +\infty[$

Donc  $x_1 \geq 1$  et  $x_2 \geq 1$  Donc  $x_1 x_2 \geq 1$  et

$x_1 \neq x_2$  Donc  $x_1 x_2 > 1$  Donc  $x_1 x_2 - 1 > 0$

et on a  $0 < x_1 x_2$  Donc  $T(x_1; x_2) = \frac{x_1 \times x_2 - 1}{x_1 \times x_2} > 0$

d'où  $f$  que est strictement croissante sur  $J = [1; +\infty[$

3)  $f$  est impaire et le symétrique de  $I = [0; 1]$  est

l'intervalle  $I' = [-1; 0[$  et le symétrique de

$J = [1; +\infty[$  est l'intervalle  $J' = ]-\infty; -1]$

Donc :  $f$  est strictement décroissante sur  $I$

Donc  $f$  est strictement décroissante sur  $I'$

$f$  est strictement croissante sur  $J$  Donc  $f$  est

strictement croissante sur  $J'$

5) le tableau de variations de  $f$  sur  $D_f$

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x} = 2$$

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$
Variations de $f(x)$		$-2$		$2$	

$$f(-1) = -1 - \frac{1}{1} = -2$$

prof : atmani najib

## 5) Les variations des deux fonctions :

### af et f+α

**Propriété :** Soit  $f$  une fonction numérique définie sur un intervalle  $I$  et  $\alpha \in \mathbb{R}^*$

- Si  $\alpha \in \mathbb{R}^{*+}$  alors les fonctions  $f$  et  $af$  ont les mêmes variations sur  $I$

- Si  $\alpha \in \mathbb{R}^{*-}$  alors les fonctions  $f$  et  $af$  ont des variations opposées sur  $I$

- $f$  et  $\alpha + f$  ont les mêmes variations sur  $I$

### Exemples :

1) soit la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par :

$$g(x) = \frac{6}{x}$$

On sait que la fonction  $f : x \rightarrow \frac{1}{x}$  est

décroissante sur  $[0; +\infty[$  et puisque  $6 > 0$  donc la fonction  $g = 6f$  est aussi décroissante sur  $[0; +\infty[$

2) Soit  $f$  et  $g$  les fonction numérique :

$$f(x) = x^2 \quad \text{et} \quad g(x) = -\frac{1}{2}x^2 \quad D_f = D_g = \mathbb{R}$$

$$h(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 5$$

On a  $a = -\frac{1}{2} < 0$  Donc alors les fonctions  $f$  et  $g$  ont des variation opposées sur  $\mathbb{R}$  et  $h$  ont les mêmes variations sur  $\mathbb{R}$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$0$	$+\infty$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$g(x)$		$0$	

## 6) comparaison deux

fonctions (fonctions positives et négatives)

Fonctions majorées ; minorées et

bornée :

### 6-1) Comparaison de fonctions

**Définition 1 :** On dit que deux fonction  $f$  et  $g$  sont égales si et seulement

si : Elles ont même ensemble de définition :

$$D_f = D_g = \mathbb{R}$$

et Pour tout  $x \in D_f$  :  $f(x) = g(x)$  et On écrit :

$$f = g$$

**Exemple :** Les fonctions  $f$  et  $g$  définies respectivement par :

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+3}} \text{ et } g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+3}}$$

Sont-elles égales ?

**Réponse :**

Déterminons leur ensemble de définition :

Pour  $f$ , on doit avoir :  $\frac{x-1}{x+3} \geq 0$  et  $x-1 \neq 0$

donc ce qui donne  $D_f = ]-\infty; -3[ \cup [1; +\infty[$

Pour  $g$ , on doit avoir  $x-1 \geq 0$  et  $x+3 > 0$

ce qui donne  $D_g = [1; +\infty[$

On a donc  $D_f \neq D_g$ . Les fonctions ne sont donc pas égales. On écrit :  $f \neq g$

On remarquera cependant que sur  $[1; +\infty[$  on a  $f(x) = g(x)$

**6-2) Définitions :** Soit  $I$  un intervalle et soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies

Sur  $I$ . On dit que :

1)  $f$  est inférieure à  $g$  sur  $I$  lorsque :  $f(x) \leq g(x)$  pour tout  $x \in I$ . On note :  $f \leq g$  Sur  $I$ .

2)  $f$  est positive sur  $I$  lorsque :  $f(x) \geq 0$  pour tout  $x \in I$ . On note :  $f \geq 0$  sur  $I$ .

3)  $f$  est majorée sur  $I$  lorsqu'il existe un réel  $M$  tel que :  $f(x) \leq M$  pour tout  $x \in I$

4)  $f$  est minorée sur  $I$  lorsqu'il existe un réel  $m$  tel que :  $m \leq f(x)$  pour tout  $x \in I$

5)  $f$  est bornée sur  $I$  lorsqu'il existe des réels  $M$  et  $m$  tels que :  $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in I$ .

( $f$  est majorée et minorée)

**Interprétation graphique :**

1)  $f(x) \leq g(x)$  pour tout  $x \in I$ ssi La courbe

( $C_g$ ) de la fonction  $g$  est au-dessus de La courbe ( $C_f$ ) de  $f$  sur l'intervalle  $I$

2)  $f(x) \geq 0$  pour tout  $x \in I$ ssi La courbe ( $C_f$ ) de la fonction  $f$  est au-dessus de l'axe des abscisses sur l'intervalle  $I$

**6-3) Exemples :**

**Exemple1 :** Soit  $f$  et  $g$  les fonctions numériques tel que:  $f(x) = x+1$  et  $g(x) = x^2 + x + 2$

Comparer les fonctions  $f$  et  $g$

**Solution :**  $D_f = D_g = \mathbb{R}$

$$g(x) - f(x) = x^2 + x + 2 - (x+1) = x^2 + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Donc :  $f(x) < g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$  donc  $f < g$

**Exemple2** Soit  $f$  et  $g$  les fonctions numériques

tel que:  $f(x) = x$  et  $g(x) = \frac{1}{x}$

Comparer les fonctions  $f$  et  $g$

**Exemple3** Soient les deux

fonctions :  $f(x) = \frac{3x^2 + 1}{\sqrt{x^2}}$  et  $g(x) = \frac{1+3x^2}{|x|}$

- on a  $f(x) \in \mathbb{R}$ ssi  $\sqrt{x^2} \in \mathbb{R}$  et  $x \neq 0$

or on sait que  $x^2 \geq 0$  donc  $\sqrt{x^2} \in \mathbb{R}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$

alors  $f(x) \in \mathbb{R}$ ssi  $x \neq 0$  donc  $D_f = \mathbb{R}^*$

- on a  $g(x) \in \mathbb{R}$ ssi  $|x| \neq 0$ ssi  $x \neq 0$

donc  $D_g = \mathbb{R}^*$

alors  $D_f = D_g = \mathbb{R}^*$

on sait que  $\sqrt{x^2} = |x|$  et  $3x^2 + 1 = 1 + 3x^2$  donc

$f(x) = g(x)$

donc finalement on a trouvé que :  $D_f = D_g = \mathbb{R}^*$  et  $f(x) = g(x)$

Donc :  $f = g$ .

**Exemple4** Soient les deux

fonctions :  $h(x) = \frac{x^2 - x}{x}$  et  $t(x) = x - 1$

- on a  $h(x) \in \mathbb{R}$ ssi  $x \neq 0$  donc  $D_h = \mathbb{R}^*$

- on a  $t(x)$  est un polynôme donc  $D_t = \mathbb{R}$

**Exemple5** Soit  $f$  la fonction numérique tel que:

$$f(x) = \frac{(3x+1)(2-x)}{4x^2 - 1}$$

Etudier le signe de la fonction  $f$

**Solution :**  $4x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\frac{1}{2}$  et  $x \neq \frac{1}{2}$

Donc :  $D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$

$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$2$	$+\infty$
$3x+1$	-	-	0	+	+	+
$2-x$	+	+	+	+	0	-
$2x-1$	-	-	-	0	+	+
$2x+1$	-	0	+	+	+	+
$\frac{(3x+1)(2-x)}{4x^2-1}$	-		+	0	-	-

$f(x) \geq 0$ ssi  $x \in \left[-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{2}; 2\right]$  donc  $f \geq 0$

$\forall x \in \left[-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{2}; 2\right]$

$f(x) \leq 0$ ssi  $x \in \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[ \cup \left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right] \cup \left[2; +\infty\right[$

**Exemple6** Soit  $f$  une fonction numérique

définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = -x^2 + x$

Démontrer que  $f$  est majorée sur  $\mathbb{R}$ .

**Solution :** On met la fonction sous la forme canonique :

$$f(x) = -x^2 + x = -(x^2 - x) = -\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right) = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

On a :  $-\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 0$  donc  $-\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$

donc :  $f(x) \leq \frac{1}{4} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

La fonction  $f$  est donc majorée sur  $\mathbb{R}$  par  $M = \frac{1}{4}$

**Exemple7** Montrer que la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = 4 \sin x - 3$  est Bornée.

**Solution :** On a  $\forall x \in \mathbb{R} -1 \leq \sin x \leq 1$  donc

$$-4 \leq 4 \sin x \leq 4$$

$$\text{donc } -4 - 3 \leq 4 \sin x - 3 \leq 4 - 3$$

$$\text{donc } -7 \leq g(x) \leq 1 \quad g \text{ est donc bornée sur } \mathbb{R}.$$

**Exemple8** Soit  $f$  une fonction numérique tq :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

1) Déterminer  $D_f$

2) Démontrer que  $f$  est majorée sur  $\mathbb{R}$ .

3) Démontrer que  $f$  est minorée sur  $\mathbb{R}$ .

Conclure

**Solution :** 1)  $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 1 \neq 0\}$

$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1$  pas de solution dans  $\mathbb{R}$

donc  $D_f = \mathbb{R}$

2) On a  $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geq 0$  donc  $x^2 + 1 \geq 0 + 1$

Donc  $x^2 + 1 \geq 1$  donc  $\frac{1}{x^2 + 1} \leq 1$

donc  $f(x) \leq 1$  par suite  $f$  est donc majorée sur  $\mathbb{R}$  par  $M = 1$

2) On a  $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geq 0$  donc  $x^2 + 1 \geq 0 + 1$

Donc  $x^2 + 1 \geq 1$  donc  $x^2 + 1 > 0$

Donc :  $0 < f(x)$

par suite  $f$  est donc minorée sur  $\mathbb{R}$  par  $m = 0$

conclusion :  $0 \leq f(x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$f$  est donc bornée sur  $\mathbb{R}$ .

**Exemple9** Soit  $f$  une fonction numérique tq :

$$f(x) = \frac{2x^2 + 7x + 7}{x^2 + 3x + 3}$$

1) Déterminer  $D_f$

2) Démontrer que  $f$  est minorée par 1.

3) Démontrer que  $f$  est majorée par  $\frac{7}{3}$ . Conclure

**Solution :** 1)  $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 3x + 3 \neq 0\}$

$\Delta = -3 < 0$  pas de solution dans  $\mathbb{R}$  donc  $D_f = \mathbb{R}$

2) soit  $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) - 1 = \frac{2x^2 + 7x + 7}{x^2 + 3x + 3} - 1 = \frac{2x^2 + 7x + 7 - (x^2 + 3x + 3)}{x^2 + 3x + 3} = \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 3x + 3}$$

$$f(x) - 1 = \frac{(x+2)^2}{x^2 + 3x + 3} \text{ or } x^2 + 3x + 3 > 0 \text{ car } \Delta = -3 < 0$$

(signe de a=1)

Et on a :  $(x+2)^2 \geq 0$  donc  $f(x) \geq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$f$  est donc minorée sur  $\mathbb{R}$  par  $m = 1$

2) soit  $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) - \frac{7}{3} = \frac{2x^2 + 7x + 7}{x^2 + 3x + 3} - \frac{7}{3} = \frac{-x^2}{3(x^2 + 3x + 3)} \leq 0$$

par suite  $f$  est majorée par  $\frac{7}{3}$ .

$$\text{conclusion : } 1 < f(x) \leq \frac{7}{3} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$f$  est donc bornée sur  $\mathbb{R}$ .

**Exemple10** Soit  $f$  une fonction numérique tq :

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2 + x + m} \text{ avec } m \in \mathbb{R}$$

1) déterminer les valeurs de  $m$  pour que  $D_f = \mathbb{R}$

2) Soit  $g$  la fonction numérique tq :

$$g(x) = \frac{1}{x+2} \text{ déterminer les valeurs de } m \text{ pour}$$

que  $\forall x \in \{-2; 1\}$  on a :  $f(x) = g(x)$

**Solution :**

1)  $D_f = \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : x^2 + x + m \neq 0$

$$x^2 + x + m \neq 0 \quad \text{ssi } \Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4m < 0$$

$$\text{Ssi } m > \frac{1}{4}$$

2)  $f(x) = g(x) \quad \forall x \in \{-2; 1\} \Leftrightarrow$

$$\frac{x-1}{x^2 + x + m} = \frac{1}{x+2}$$

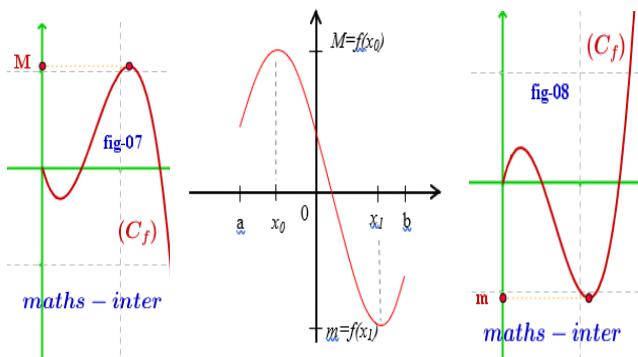
$$\Leftrightarrow (x-1)(x+2) = x^2 + x + m \Leftrightarrow$$

$$x^2 + x - 2 = x^2 + x + m$$

$$f(x) = g(x) \quad \forall x \in \{-2; 1\} \Leftrightarrow -2 = m$$

## 7) Les extréums d'une fonction Numérique

### 7-1)) Définitions :



Soit  $f$  une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert  $I$  et soit  $a \in I$

- Dire que  $f(a)$  est une valeur maximale de  $f$  sur  $I$  (ou  $f(a)$  est un maximum de  $f$  sur  $I$ ) ssi pour tout que  $x \in I$ :  $f(x) \leq f(a)$
- Dire que  $f(a)$  est une valeur minimale de  $f$  sur  $I$  (ou  $f(a)$  est un minimum de  $f$  sur  $I$ ) ssi pour tout  $x \in I$ :  $f(x) \geq f(a)$

### 7-2) Exemples d'applications :

1° Soit  $f$  une fonction numérique tq :

$$f(x) = 5x^2 + 3 \quad D_f = \mathbb{R}$$

On a pour tout  $x \in \mathbb{R}$   $x^2 \geq 0$  Donc  $5x^2 \geq 0$   
car  $5 > 0$

Par suite  $5x^2 + 3 \geq 3$  et on a  $f(0) = 3$

Donc pour tout  $x \in \mathbb{R}$   $f(x) \geq f(0)$

d'où  $f(0) = 3$  est un minimum absolu de  $f$  sur  $\mathbb{R}$

2° Soit  $g$  une fonction numérique tq :

$$g(x) = -4x^2 + 1 \quad D_g = \mathbb{R}$$

On a pour tout  $x \in \mathbb{R}$   $x^2 \geq 0$  Donc  $-4x^2 \leq 0$   
car  $-4 < 0$

Par suite  $-4x^2 + 1 \leq 1$  et on a  $g(0) = 1$

Donc pour tout  $x \in \mathbb{R}$   $g(x) \leq g(0)$

d'où  $g(0) = 1$  est un maximum absolu de  $g$  sur  $\mathbb{R}$

### 7-3) Exemples :

**Exemple1 :** Soit  $f$  une fonction numérique tq :

$$f(x) = -4x^2 + 4x + 5$$

1° a) montrer que  $f(x) = 6 - (2x - 1)^2$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$

b)  $f(x) \leq 6$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$

2° calculer :  $f\left(\frac{1}{2}\right)$  et en déduire les extréums de  $f$  sur  $\mathbb{R}$

**Réponses:** 1° a) on a  $D_f = \mathbb{R}$

$$6 - (2x - 1)^2 = 6 - (4x^2 - 4x + 1)$$

$$= 6 - 4x^2 + 4x - 1 = -4x^2 + 4x + 5$$

$$\text{Donc } f(x) = 6 - (2x - 1)^2$$

b) Donc pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on a  $(2x - 1)^2 \geq 0$

Par suite  $-(2x - 1)^2 \leq 0$  donc  $6 - (2x - 1)^2 \leq 6$

Donc pour tout  $x \in \mathbb{R}$   $f(x) \leq 6$

$$2° \text{ on a } f\left(\frac{1}{2}\right) = 6 - \left(2 \times \frac{1}{2} - 1\right)^2 = 6 - (1 - 1)^2 = 6$$

on a pour tout  $x \in \mathbb{R}$   $6 - (2x - 1)^2 \leq 6$  alors

$$f(x) \leq f\left(\frac{1}{2}\right)$$

Donc  $f\left(\frac{1}{2}\right) = 6$  est un maximum de  $f$  sur  $\mathbb{R}$

**Exemple2 :** Du tableau de variation on a :

$x$	-5	-2	2	5
$f(x)$	5	0,5	2	-2

Le nombre 2 est une valeur maximale de  $f$  au point  $x_0 = 2$

Le nombre 0,5 est une valeur Minimale de  $f$  au point  $x_0 = -2$

**Exemple3 :**

Soit  $f$  une fonction numérique tq :

$$f(x) = -x^2 + 4x - 3$$

Montrer que 1 est le maximum absolu de  $f$  sur  $\mathbb{R}$

**Solution :**  $D_f = \mathbb{R}$

Montrons donc que :  $f(x) \leq 1$  et que l'équation

$f(x) = 1$  admet une solution dans  $\mathbb{R}$

$$f(x) - 1 = -x^2 + 4x - 3 - 1 = -x^2 + 4x - 4$$

$$f(x) - 1 = -(x^2 - 4x + 4) = -(x - 2)^2 \leq 0$$

Donc  $f(x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$  et on a :

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow f(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow -(x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Donc l'équation  $f(x) = 1$  admet une solution dans  $\mathbb{R}$

Et on a :  $f(2) = 1$  donc :  $f(x) \leq f(2) \quad \forall x \in \mathbb{R}$   
que  $f(2) = 1$  est le maximum absolu de  $f$  sur  $\mathbb{R}$

**Exemple4 :** Soit  $f$  une fonction numérique tq :

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3}{x^2 + 1}$$

1) Déterminer  $D_f$

- Démontrer que  $f$  est majorée par 3.
- est ce que 3 est une valeur maximale de  $f$  ?
- a) Démontrer que  $f$  est minorée par 2.
- est ce que 2 est une valeur minimale de  $f$  ?

**Solution :**

$$1) D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 1 \neq 0\}$$

$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1$  pas de solution dans  $\mathbb{R}$  donc

$$D_f = \mathbb{R}$$

2) a) soit  $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) - 3 = \frac{2x^2 + 3}{x^2 + 1} - 3 = \frac{2x^2 + 3 - 3(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \frac{2x^2 + 3 - 3x^2 - 3}{x^2 + 1}$$

$$\text{Donc } f(x) - 3 = \frac{-x^2}{x^2 + 1} \leq 0 \text{ par suite } f(x) \leq 3 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$f$  est donc majorée sur  $\mathbb{R}$  par  $M = 3$

b) on remarque que :  $f(0) = 3$

donc  $f(x) \leq f(0) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Donc 3 est une valeur maximale de  $f$

2) a) soit  $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) - 2 = \frac{2x^2 + 3}{x^2 + 1} - 2 = \frac{2x^2 + 3 - 2(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \frac{2x^2 + 3 - 2x^2 - 2}{x^2 + 1}$$

$$\text{Donc } f(x) - 2 = \frac{1}{x^2 + 1} > 0 \text{ par suite :}$$

$0 < f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

par suite  $f$  est donc minorée sur  $\mathbb{R}$  par  $m = 2$

b) on remarque que :  $f(x) > 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2 n'est pas donc une valeur minimale de  $f$

conclusion :  $2 < f(x) \leq 3 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$f$  est donc bornée sur  $\mathbb{R}$ .

**Exemple5:** Soit  $f$  une fonction numérique définie

$$\text{sur } ]1; +\infty[ \text{ par : } f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{x-1}$$

1) étudier le signe de  $f$

2) a) Démontrer que  $f$  est majorée par  $\frac{\sqrt{2}}{4}$ .

b) est ce que  $\frac{\sqrt{2}}{4}$  est une valeur maximale de  $f$  ?

**Solution :** 1) soit  $x \in ]1; +\infty[$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{x-1} = \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{2})(\sqrt{x+1} + \sqrt{2})}{(x-1)(\sqrt{x+1} + \sqrt{2})}$$

$$f(x) = \frac{x+1-2}{(x-1)(\sqrt{x+1} + \sqrt{2})} = \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+1} + \sqrt{2})}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{2}} > 0$$

Donc  $f(x) > 0$  si  $x \in ]1; +\infty[$

2) a)  $x \in ]1; +\infty[$  montrons que  $f(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{4}$

soit  $x \in ]1; +\infty[$  donc  $x > 1$  cad  $x+1 > 2$

donc  $\sqrt{x+1} > \sqrt{2}$  donc  $\sqrt{x+1} + \sqrt{2} > 2\sqrt{2}$

$$\text{donc } \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{2}} < \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\text{donc } f(x) < \frac{\sqrt{2}}{4} \quad \forall x \in ]1; +\infty[$$

$f$  est donc majorée sur  $\mathbb{R}$  par  $M = 3$

conclusion :  $2 < f(x) \leq 3 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

b) on remarque que :  $f(0) = 3$

donc  $f(x) \leq f(0) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Donc 3 est une valeur maximale de  $f$

$f$  est donc bornée sur  $]1; +\infty[$  par  $\frac{\sqrt{2}}{4}$

b) puisque  $f(x) \neq \frac{\sqrt{2}}{4} \quad \forall x \in ]1; +\infty[$

$\frac{\sqrt{2}}{4}$  N'est pas une valeur maximale de  $f$

**Exemple6 :** Soit  $f$  une fonction numérique

$$\text{définie sur } ]1; +\infty[ \text{ par : } f(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}$$

1) )Déterminer  $D_f$

2) Démontrer que -1 est la valeur minimal de  $f$

3) Démontrer que  $f$  est majorée par 1 et est ce que 1 est une valeur maximale de  $f$  ?

**Solution :** 1)

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / \sqrt{x} + 2 \neq 0 \text{ et } x \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / \sqrt{x} \neq -2 \text{ et } x \geq 0\}$$

$$D_f = [0; +\infty[$$

2) Montrons donc que :  $f(x) \geq -1$  et que l'équation  $f(x) = -1$  admet une solution dans  $\mathbb{R}^+$

$$f(x) - (-1) = f(x) + 1 = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 2} + 1 = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2} \geq 0$$

Donc  $f(x) \geq -1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$  et on a :

$$f(x) = -1 \Leftrightarrow f(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Donc l'équation  $f(x) = -1$  admet une solution dans  $\mathbb{R}^+$

Et on a :  $f(0) = -1$  donc :  $f(x) \geq f(0) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

On dit que  $f(0) = -1$  est le minimum absolu de  $f$  sur  $\mathbb{R}^+$

$$3) \text{ soit } x \in \mathbb{R}^+ \quad f(x) - 1 = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 2} - 1 = \frac{-4}{\sqrt{x} + 2} < 0$$

Donc  $f(x) < 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$

Donc  $f$  est donc majorée sur  $\mathbb{R}^+$  par  $M = 1$

Et puisque  $f(x) = 1$  n'admet pas de solution dans  $\mathbb{R}^+$

Donc 1 n'est pas une valeur maximale de  $f$

$f$  est donc bornée sur  $]1; +\infty[$  par  $\frac{\sqrt{2}}{4}$

b) puisque  $f(x) \neq \frac{\sqrt{2}}{4} \quad \forall x \in ]1; +\infty[$

$\frac{\sqrt{2}}{4}$  n'est pas une valeur maximale de  $f$

**Exemple 7 :** Soit  $f$  une fonction numérique tel que :  $f(x) = x^2 - 2x + 3$

1)a) Démontrer que  $f$  est minorée.

b) est ce que  $f$  admet une valeur minimale ?

2) Démontrer que  $f$  est non majorée.

**Solution :**  $D_f = \mathbb{R}$

$$1)a) \quad f(x) = x^2 - 2x + 3 = (x^2 - 2x + 1) + 2 = (x-1)^2 + 2$$

$$\text{Donc } f(x) - 2 = (x-1)^2 \geq 0$$

donc :  $f(x) \geq 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$  donc que  $f$  est minorée par 2

et on a :  $f(1) = 2$  donc :  $f(x) \geq f(1) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

donc  $f$  admet une valeur minimale c'est 2

2) Démontrons que  $f$  est non majorée.

Supposons  $f$  majorée donc :

$$\exists M \in \mathbb{R} : f(x) \leq M \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : (x-1)^2 + 2 \leq M$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : (x-1)^2 \leq M - 2$$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{(x-1)^2} \leq \sqrt{M-2}$  (on peut toujours supposer  $M \geq 2$ )

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : |x-1| \leq \sqrt{M-2}$$

$$\text{Donc on a : } -\sqrt{M-2} \leq x-1 \leq \sqrt{M-2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Donc on a :  $-\sqrt{M-2} + 1 \leq x \leq \sqrt{M-2} + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$  absurde

Donc  $f$  est non majorée

## 8) Etude et représentation graphique des fonctions $x \xrightarrow{f} ax^2 + bx + c$

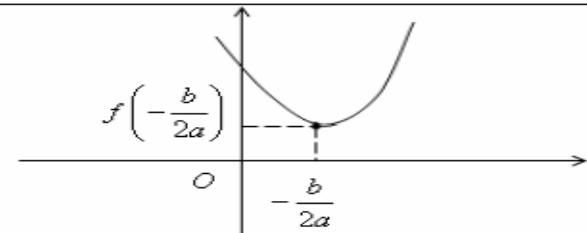
8-1) Résumé :  $f(x) = ax^2 + bx + c$  et  $a \neq 0$

1° Dans le repère  $(0; \vec{i}; \vec{j})$  la courbe ( $C_f$ ) c'est une parabole de sommet  $W(\alpha; \beta)$  et d'axe de symétrie la droite  $x = \alpha$

2° Les variations de  $f$

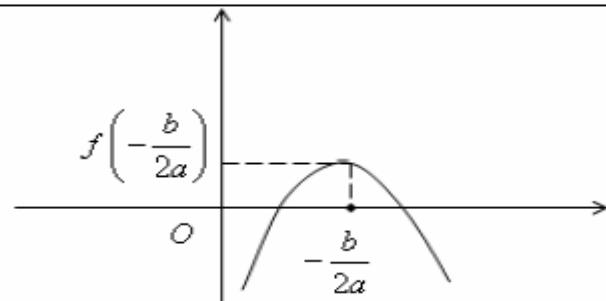
Si  $a > 0$

$x$	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$		$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	



Si  $a < 0$

$x$	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$		$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	



## 2-2) Exemples :

1° Soit  $f$  une fonction numérique

$$\text{tq : } f(x) = 2x^2 - 4x - 2$$

on a  $f$  est une fonction polynôme donc  $D_f = \mathbb{R}$

On a  $a=2$  et  $b=-4$  et  $c=-2$

$$(f(x) = ax^2 + bx + c)$$

$$\text{Donc } -\frac{b}{2a} = \frac{4}{2 \times 2} = 1 \text{ et } (f(1) = 2 - 4 - 2 = -4)$$

Pour tout réel  $x \in \mathbb{R}$  on peut écrire sous la forme :

$$f(x) = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = 2(x-1)^2 - 4$$

Soit  $W(1; -4)$  Donc dans le repère  $(0; \vec{i}; \vec{j})$  la

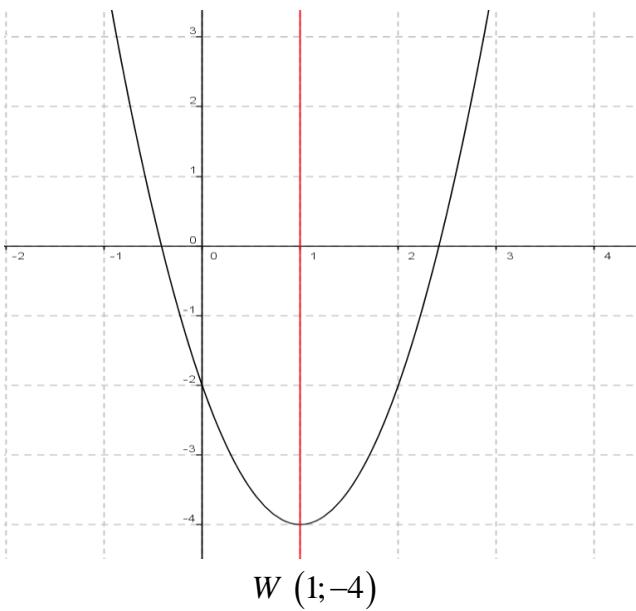
courbe  $(C_f)$  c'est une parabole de sommet  $W(1; -4)$

et d'axe de symétrie la droite  $x = 1$

### Tableau de variations de $f$

On a  $a=2 > 0$  donc :

$x$	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$		-4	



2° Soit  $g$  une fonction numérique tq :

$$g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$$

on a  $g$  est une fonction polynôme donc  $D_g = \mathbb{R}$

On a  $a = -\frac{1}{2}$  et  $b = 2$  et  $c = 1$

$$(g(x) = ax^2 + bx + c)$$

$$\text{Donc } -\frac{b}{2a} = 2 \text{ et } \beta = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{4+2}{-2} = 3$$

Donc pour tout réel  $x \in \mathbb{R}$  on peut écrire sous la forme :  $g(x) = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 3$

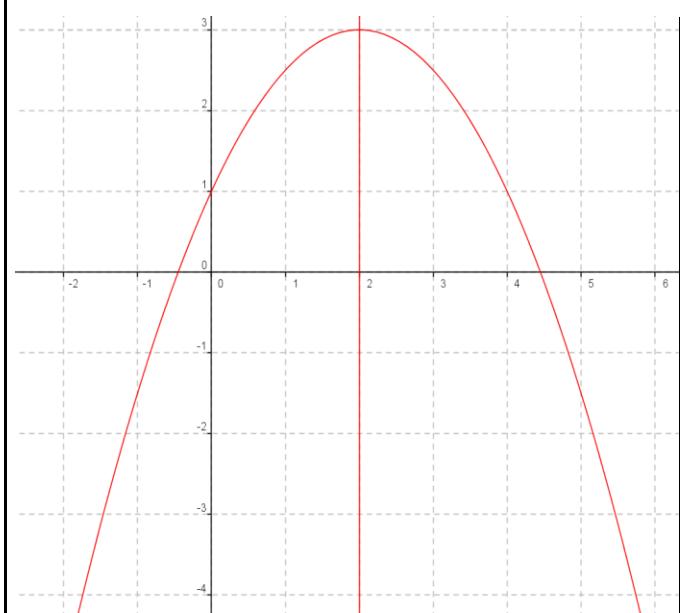
$$\left( g(2) = -\frac{1}{2}(2-2) + 3 = 3 \right)$$

Soit  $W(2; 3)$  Donc dans le repère  $(0; \vec{i}; \vec{j})$  la courbe  $(C_g)$  c'est une parabole de sommet  $W(2; 3)$  et d'axe de symétrie la droite  $x = 2$

### Tableau de variations de $f$

On a  $a = -\frac{1}{2} < 0$  donc :

$x$	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$		3	



## 9) Etude et représentation graphique des fonctions homographiques :

$$x \xrightarrow{f} \frac{ax+b}{cx+d} \quad a \neq 0 \text{ et } c \neq 0$$

**9-1) Résumé et propriété :** 1) Soit  $f$  une fonction

$$\text{tq : } f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \quad \text{on a } f(x) \in \mathbb{R} \text{ ssi } cx+d \neq 0$$

$$\text{ssi } x \neq -\frac{d}{c} \quad \text{donc : } D_f = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$$

dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  ( $C_f$ ) est l'hyperbole de centre  $W\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$  et d'asymptotes les droites

$$\text{d'équations respectives } x = -\frac{d}{c} \text{ et } y = \frac{a}{c}$$

$$\begin{array}{l} \text{1ier cas : si } \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc > 0 \end{array}$$

Tableau de variations de  $f$  :

$x$	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
$f(x)$			

$$\begin{array}{l} \text{2ier cas : si } \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc < 0 \end{array}$$

Tableau de variations de  $f$  :

$x$	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
$f(x)$			

### 9-2) Exemples :

**Exemple 1:** Soit  $f$  une fonction numérique tq :

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$$

on a  $f(x) \in \mathbb{R}$  ssi  $x-1 \neq 0$  ssi  $x \neq 1$

$$\text{Donc } D_f = \mathbb{R} - \{1\} \quad \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3 < 0$$

• Donc le tableau de variations de

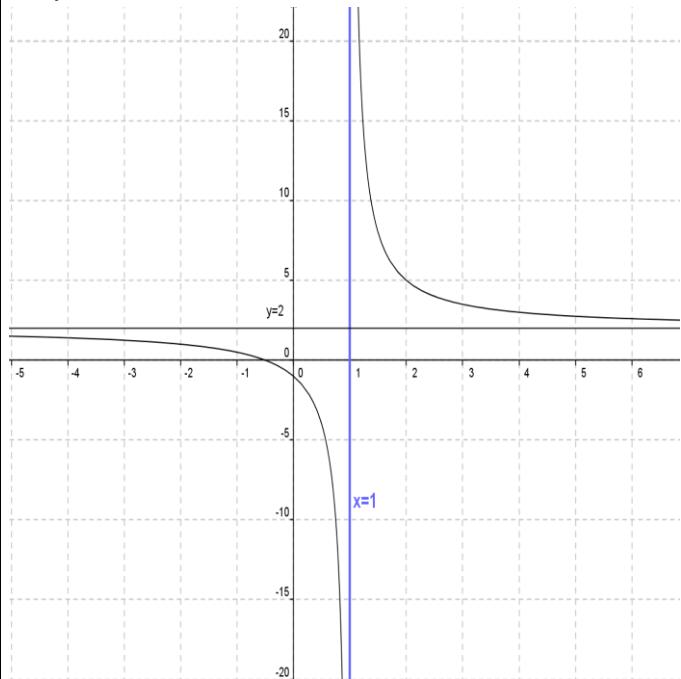
$$x \xrightarrow{f} \frac{2x+1}{x-1}$$

$x$	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$			

- Représentation graphique

-2	1-	0	1	2	3	4
1	$\frac{1}{2}$	-1		5	$\frac{7}{2}$	3

$(C_f)$  est l'hyperbole de centre  $W(1; 2)$  et d'asymptotes les droites d'équations respectives  $x=1$  et  $y=2$



### Exemples 2:

Soit  $g$  une fonction numérique

$$\text{tq : } g(x) = \frac{-x}{x-2}$$

on a  $g(x) \in \mathbb{R}$  ssi  $x-2 \neq 0$  ssi  $x \neq 2$

Donc  $D_g = \mathbb{R} - \{2\}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 > 0$$

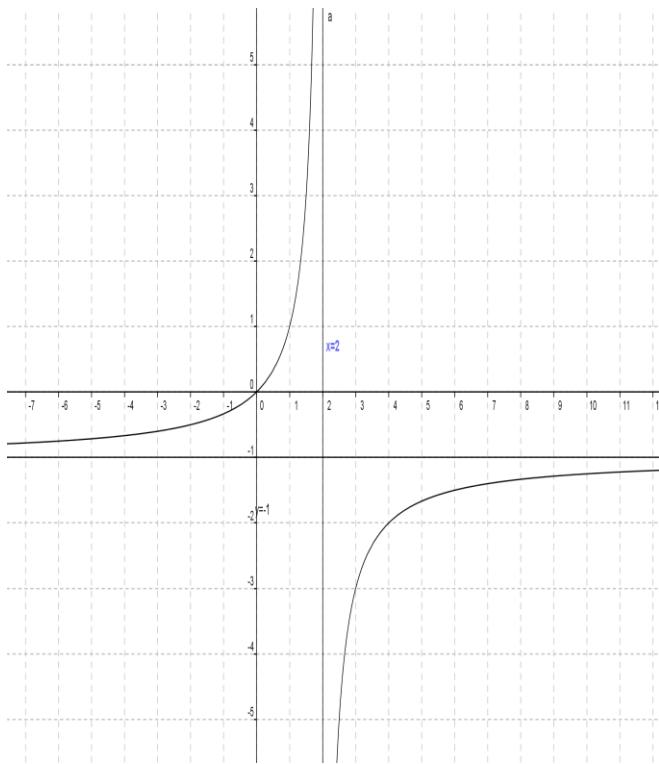
• Donc le tableau de variations

$x$	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$			

- Représentation graphique

-1	0	1	2	3	4	5
-1/3	0	1		-3	-2	-5/3

$(C_f)$  est l'hyperbole de centre  $W(2; -1)$  et d'asymptotes les droites d'équations respectives  $x=2$  et  $y=-1$



### 10) Etude et représentation graphique de la fonction polynôme: $x \xrightarrow{f} ax^3$

**Exemple :** Soit f une fonction numérique

définie par :  $f(x) = \frac{1}{4}x^3$

1) Déterminer  $D_f$

2) étudier les variations de f et dresser le tableau de variation

3) tracer la dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  la courbe  $(C_f)$  de f

**Solutions :** 1)  $D_f = x \in \mathbb{R}$

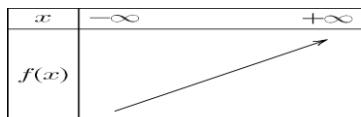
2) soient  $x_1 \in \mathbb{R}$  et  $x_2 \in \mathbb{R}$  tq  $x_1 < x_2$

$$\text{Donc : } x_1^3 < x_2^3 \text{ Donc : } \frac{1}{4}x_1^3 < \frac{1}{4}x_2^3$$

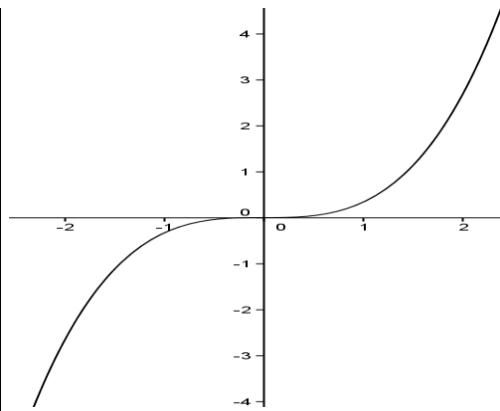
$$\text{Donc : } f(x_1) < f(x_2)$$

Donc f est strictement croissante

Tableau de variation



$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	6.5	-2	-1/4	0	1/4	2	6.5



### 11) Etude et représentation graphique de la fonction polynôme: $x \xrightarrow{f} \sqrt{a+x}$

**Exemple :** Soit f une fonction numérique

définie par :  $f(x) = \sqrt{x+2}$

1) Déterminer  $D_f$

2) étudier les variations de f et dresser le tableau de variation

3) tracer la dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  la courbe  $(C_f)$  de f

**Solutions :** 1)

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x + 2 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x \geq -2\} = [-2, +\infty[$$

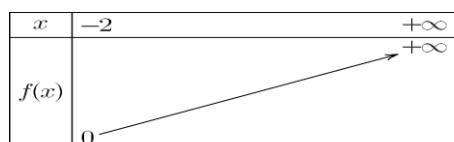
2) soient  $x_1 \in [-2; +\infty[$  et  $x_2 \in [-2; +\infty[$  tq  $x_1 < x_2$

$$\text{Donc : } x_1 + 2 < x_2 + 2 \text{ Donc : } \sqrt{x_1 + 2} < \sqrt{x_2 + 2}$$

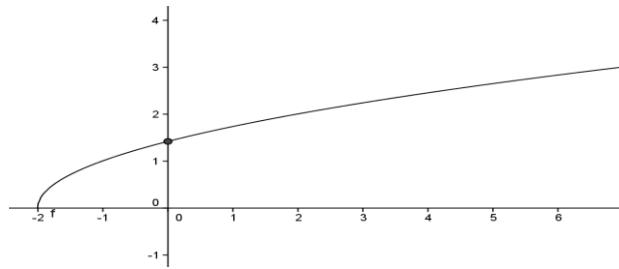
$$\text{Donc : } f(x_1) < f(x_2)$$

Donc f est strictement croissante

Tableau de variation :



$x$	-2	-1	0	2	7
$f(x)$	0	1	$\sqrt{2}$	2	3



## 12) La composée de deux fonctions

**13-1) Définition :** Soit la fonction définie sur l'ensemble I et g la fonction définie sur l'ensemble J tel que :  $\forall x \in I \quad f(x) \in J$

La composée des deux fonctions f et g est la fonction noté :  $g \circ f$  définie sur I par :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \forall x \in I$$

On peut alors faire le schéma suivant :

$$x \rightarrow f(x) = y \rightarrow g(f(x)) = z$$

### 13-2) Exemples

**Exemple1 :** Soit les fonctions f et g

tel que :  $f(x) = x^2 - 2x + 3$  et  $g(x) = 2x + 1$

Déterminer :  $g \circ f$  et  $f \circ g$

**Solution :** on a :  $D_f = \mathbb{R}$  et  $D_g = \mathbb{R}$  donc

$$D_{g \circ f} = \mathbb{R} \text{ et } D_{f \circ g} = \mathbb{R}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 2x + 3) = 2(x^2 - 2x + 3) + 1$$

$$(g \circ f)(x) = 2x^2 - 4x + 7$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x + 1) = (2x + 1)^2 - 2(2x + 1) + 3$$

$$(f \circ g)(x) = 4x^2 + 4x + 1 - 4x - 2 + 3 = 4x^2 + 2$$

**Remarque :** 1) La composée de deux fonctions n'est pas commutative

c.-à-d.  $g \circ f \neq f \circ g$

2) Soit  $D_f$  et  $D_g$  les ensembles de définition des fonctions f et g.

$$D_{g \circ f} = \left\{ x \in \mathbb{R} / x \in D_f \text{ et } f(x) \in D_g \right\}$$

**Exemple2:** Soit les fonctions f et g définies

$$\text{par : } f(x) = 3x + 4 \text{ et } g(x) = \frac{1}{x+1}$$

1) Déterminer  $D_{g \circ f}$

2) déterminer :  $(g \circ f)(x)$

**Solution :** 1)  $D_{g \circ f} = \left\{ x \in \mathbb{R} / x \in D_f \text{ et } f(x) \in D_g \right\}$

On a  $D_f = \mathbb{R}$  et  $D_g = \mathbb{R} - \{-1\}$  donc

$$D_{g \circ f} = \left\{ x \in \mathbb{R} / x \in \mathbb{R} \text{ et } f(x) \neq -1 \right\}$$

$$f(x) = -1 \Leftrightarrow 3x + 4 = -1 \Leftrightarrow 3x = -5 \Leftrightarrow -\frac{5}{3} = x$$

$$\text{donc : } D_{g \circ f} = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{5}{3} \right\}$$

2) on a :  $D_f = \mathbb{R}$  et  $D_g = \mathbb{R} - \{-1\}$

$$\text{et } D_{g \circ f} = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{5}{3} \right\}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x + 4) = \frac{1}{3x + 4 + 1}$$

$$(g \circ f)(x) = \frac{1}{3x + 5}$$

**Exemple3 :** Soit les fonctions f et g définies

$$\text{par : } g(x) = \frac{x}{x+2} \text{ et } f(x) = \frac{x+3}{x+1}$$

$$\text{On pose : } h(x) = (g \circ f)(x)$$

1) Déterminer  $D_h$  2) déterminer :  $h(x)$

$$3) \text{ Soit la fonction } k \text{ définie par : } k(x) = \frac{x+3}{3x+5}$$

Les fonctions  $h$  et  $k$  sont-elles égales ?

**Solution :** 1) on a :  $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$  et

$$D_g = \mathbb{R} - \{-2\}$$

$$D_{g \circ f} = \left\{ x \in \mathbb{R} / x \in D_f \text{ et } f(x) \in D_g \right\}$$

$$D_{g \circ f} = \left\{ x \in \mathbb{R} / x \neq -1 \text{ et } f(x) \neq -2 \right\}$$

$$f(x) = -2 \Leftrightarrow \frac{x+3}{x+1} = -2$$

$$\Leftrightarrow -2(x+1) = x+3 \Leftrightarrow -3x = 5 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{3}$$

$$\text{donc : } D_{g \circ f} = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{5}{3}; -1 \right\}$$

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x+3}{x+1}\right)$$

$$h(x) = \frac{\frac{x+3}{x+1}}{\frac{x+3}{x+1} + 2} = \frac{\frac{x+3}{x+1}}{\frac{x+3+2x+2}{x+1}} = \frac{\frac{x+3}{x+1}}{\frac{3x+5}{x+1}} = \frac{x+3}{3x+5}$$

$$\text{Donc : } h(x) = \frac{x+3}{3x+5}$$

3) Les fonctions  $h$  et  $k$  ne sont pas égales car ils n'ont pas le même ensemble de définition :

$$D_h = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{5}{3}; -1 \right\} \text{ et } D_k = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{5}{3} \right\}$$

**Exemple4 :** exprimer les fonctions suivantes à l'aide de fonctions élémentaires :

$$1) h_1(x) = \frac{1}{3x-1} \quad 2) \quad h_2(x) = \sqrt{x+3}$$

$$3) \quad h_3(x) = 3\sqrt{x} + 4$$

$$\text{Solution : } 1) h_1(x) = \frac{1}{3x-1} \text{ on a : } h_1(x) = (g \circ f)(x)$$

$$\text{avec } f(x) = 3x - 1 \text{ et } g(x) = \frac{1}{x}$$

$$2) h_2(x) = \sqrt{x+3} \text{ on a : } h_2(x) = (g \circ f)(x)$$

avec  $f(x) = x + 3$  et  $g(x) = \sqrt{x}$

3)  $h_3(x) = 3\sqrt{x} + 4$  on a :  $h_3(x) = (g \circ f)(x)$

avec  $f(x) = \sqrt{x}$  et  $g(x) = 3x + 4$

### 13-3) Variations d'une fonction composée

**Théorème :** Soit une fonction  $f$  définie sur un intervalle  $I$  et une fonction  $g$  définie sur  $f(I)$ .

⇒ Si  $f$  et  $g$  ont même variation respectivement sur  $I$  et  $f(I)$  alors la fonction  $g \circ f$  est croissante sur  $I$ .

⇒ Si  $f$  et  $g$  ont des variations opposées respectivement sur  $I$  et  $f(I)$  alors la fonction  $g \circ f$  est décroissante sur  $I$ .

**Remarque :** Il peut être intéressant de décomposer une fonction en fonctions élémentaires

La fonction  $g \circ f$  est décroissante sur  $I$

**Exemple1:** Soit  $f$  la fonction  $f$  définie sur

un intervalle  $[0; +\infty[$  tel que :  $f(x) = -5x^2 + 7$

On va décomposer une fonction en fonctions élémentaires :

$$v(x) = -5x + 7 \text{ et } u(x) = x^2$$

La fonction  $f = v \circ u$

La fonction  $u$  est croissante sur  $[0; +\infty[$  et

$$u(x) = x^2 \in [0; +\infty[ \text{ et } l$$

$v$  est décroissante sur

$[0; +\infty[$  Donc d'après le théorème des fonctions composées,  $f = v \circ u$  est décroissante sur  $[0; +\infty[$

**Exemple2:** Soit la fonction  $h$  définie sur  $]-\infty; 1]$

$$\text{par } h(x) = \sqrt{1-x}$$

1) Décomposer  $h$  en deux fonctions élémentaires.

2) Déterminer les variations de  $h$ .

**Solution :** 1) La fonction  $h$  se décompose de cette façon  $h = g \circ f$

on a alors :  $f(x) = 1-x$  et  $g(x) = \sqrt{x}$

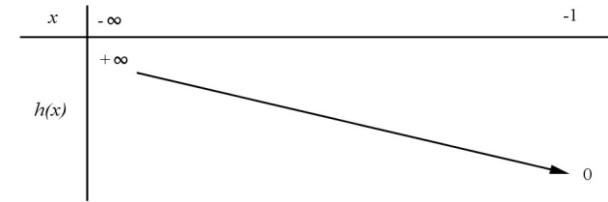
2) On sait que :

⇒  $f$  est décroissante sur  $]-\infty; 1]$

⇒  $g$  est croissante sur  $f(]-\infty; 1]) = [0; +\infty[$

Donc La fonction  $h$  décroissante sur  $]-\infty; 1]$

On a alors le tableau de variation suivant



### 13) Fonctions périodiques :

**Définition :** On considère une fonction réelle  $f$  dont on note  $D$  l'ensemble de définition.

On dit que  $f$  est périodique de période  $T$  si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

a)  $\forall x \in D$  on a  $x+T \in D$

b)  $\forall x \in D$  on a  $f(x+T) = f(x)$

et la période de  $f$  c'est le plus petit réel strictement positif qui vérifie les conditions

#### Exemple de fonctions périodiques :

1. Une fonction constante sur  $\mathbb{R}$  est périodique ; tout réel non nul en est une période.

2. La fonction  $x \rightarrow E(x)$  est périodique, 1 est une période ainsi que tout entier non nul.

3. les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période  $T = 2\pi$  et la fonction tangente est périodique de période  $T = \pi$

4) La période des fonctions:  $f : x \rightarrow \cos(ax)$  et

$$f : x \rightarrow \sin(ax) \quad a \neq 0 \text{ est } T = \frac{2\pi}{a}$$

**Exemple1 :** Montrer que la fonction

$f : x \rightarrow x - E(x)$  est périodique de période 1.

**Solution :**  $D_f = \mathbb{R}$

a)  $\forall x \in \mathbb{R}$  on a  $x+1 \in \mathbb{R}$

b)  $\forall x \in \mathbb{R}$  on a:

$$f(x+1) = x+1 - E(x+1) = x+1 - E(x)-1 = f(x)$$

L'application  $f$  est donc périodique

de période 1.

**Exemple2 :** Quelle est la période des fonctions suivantes :

1)  $f : x \rightarrow \sin(4x-1) \quad 2) \quad g : x \rightarrow \cos(5x)$

3) Trouver une fonction de période  $T = \frac{3}{4}$

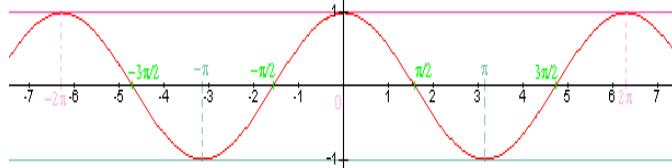
**Solution :** 1)  $T = \frac{2\pi}{a} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \quad 2) \quad T = \frac{2\pi}{5}$

3) Une fonction est  $h : x \rightarrow \cos(\frac{8\pi}{3}x)$

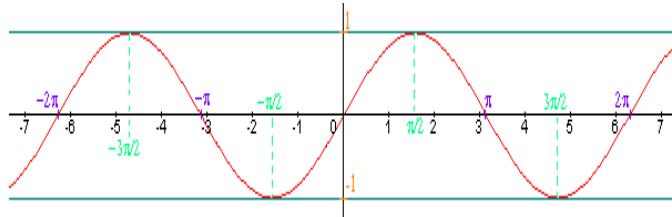
**Remarque :** La périodicité permet de réduire l'étude des variations d'une fonction à un intervalle de longueur égale à la période. Donc pour tracer la représentation graphique d'une fonction  $T$ -périodique, il suffit donc de

construire la courbe sur un intervalle de longueur  $T$  puis de translater autant de fois que nécessaire.

**Exemple3 :** Observons une courbe représentative de la fonction  $\cos$  on a  $T = 2\pi$  et sur  $[-\pi; \pi]$  dont la longueur est égale à  $2\pi$ . La courbe se répète tous les  $T = 2\pi$



**Exemple4 :** courbe représentative de la fonction  $\sin$  :



**Exemple5:** Soit  $f$  une fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}$  et périodique de période  $T = 2$

tel que :  $f(x) = 2x - x^2 \quad \forall x \in [0; 2[$

1) Tracer la représentation graphique de la fonction sur  $[-2; 8]$  dans un repère  $(0; \vec{i}; \vec{j})$

2) calculer :  $f(4.1)$ ;  $f(-3.5)$ ;  $f(265.11)$

**Solution :** dans l'intervalle  $I_0 = [0; 2[$  on a  $f$  est une fonction polynôme donc

$$D_f = \mathbb{R}$$

On a  $a = -1$  et  $b = 2$  et  $c = 0$

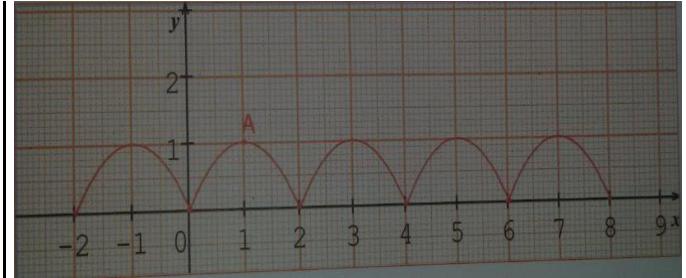
$$(f(x) = ax^2 + bx + c)$$

$$\text{Donc } -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \times (-1)} = 1 \text{ et } (f(1) = 2 - 1 = 1)$$

Donc la courbe ( $C_f$ ) c'est une portion parabole de sommet  $A(1; 1)$  et d'axe de symétrie la droite  $x = 1$

Pour Tracer la représentation graphique de la fonction sur  $[-2; 8]$  il suffit de Tracer la représentation graphique de la fonction sur  $I_0 = [0; 2[$

et utiliser les translation  $2k\vec{i}$  avec  $k \in \mathbb{Z}$



2) calculer :

$$f(4.1) = f(2 + 2.1) = f(2.1) = f(2 + 0.1) = f(0.1)$$

$$f(4.1) = 2(0.1) - (0.1)^2 = 0.19$$

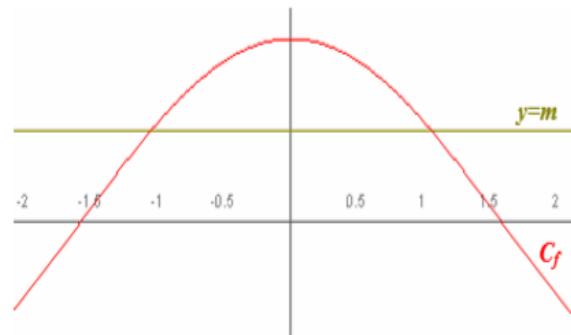
$$f(-3.5) = f(-4 + 0.5) = f(0.5)$$

$$f(-3.5) = 2(0.5) - (0.5)^2 = 0.75$$

$$f(265.11) = f(2 \times 132 + 1.11) = f(1.11)$$

$$f(1.11) = 2(1.11) - (1.11)^2 \approx 0.98$$

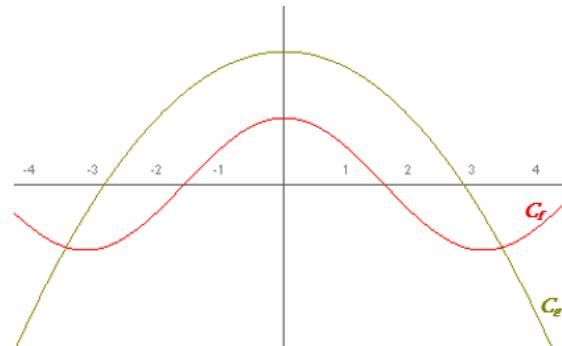
## 15) Applications : Position relative de courbes, interprétation graphique d'équations et d'inéquations



Le but de ce chapitre est de pouvoir déterminer par le calcul, entre 2 courbes, quelle courbe se situe au-dessus de l'autre et sur quel(s) intervalle(s). Il te permettra d'interpréter ensuite, dans des problèmes plus concrets, des situations liées à la physique, la chimie, l'économie, ?

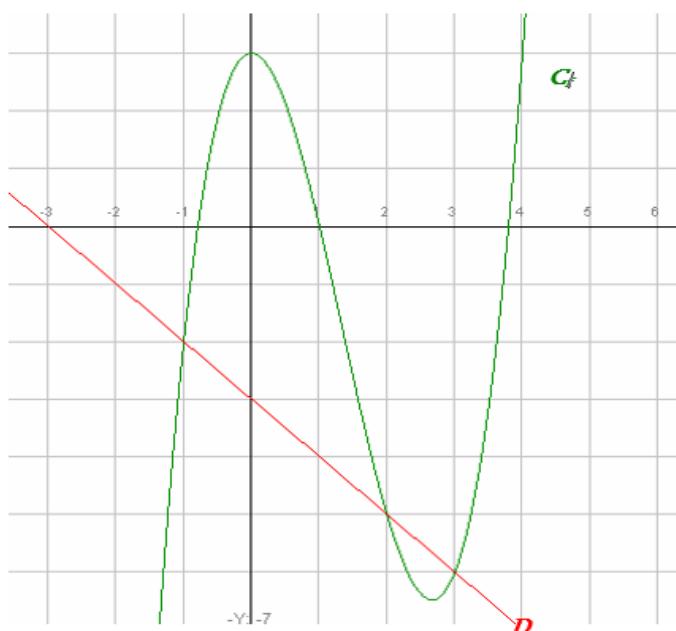
### 1) Position relative de deux courbes et intersection

Soient  $(C_f)$  la courbe représentative de  $f$  et  $(C_g)$  la courbe représentative de  $g$ .



On peut établir les relations suivantes :

$$M(x; y) \in (C_f) \text{ ssi } y = f(x)$$



$$M(x; y) \in (C_g) \text{ ssi } y = g(x)$$

Aux points d'intersection de  $(C_f)$  et de  $(C_g)$ , on a  $M \in (C_f)$  et  $M \in (C_g)$  donc

$$\text{soit } f(x) = g(x)$$

#### **A retenir :**

- les solutions de l'équation  $f(x) = g(x)$  sont les abscisses des points D'intersection de  $(C_f)$  et de  $(C_g)$  .
- les solutions de l'inéquation  $f(x) \geq g(x)$  sont les abscisses des points de  $(C_f)$  situées au-dessus de  $(C_g)$  .
- les solutions de l'inéquation  $f(x) \leq g(x)$  sont les abscisses des points de  $(C_f)$  situées au-dessous de  $(C_g)$  .

**Un cas particulier : équation  $f(x) = m$  et inéquation  $f(x) \geq m$**

- Les solutions de l'équation  $f(x) = m$  sont les abscisses des points d'intersection de  $(C_f)$  avec la droite d'équation  $y = m$
- Les solutions de l'inéquation  $f(x) \geq m$  sont les abscisses des points de  $(C_f)$  situés au-dessus de la droite d'équation  $y = m$  .

## 2) Quelques exercices d'application

**Exercice1 :** Soit la courbe  $(C_f)$  représentative de  $f$  telle que  $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3$  et la droite  $(D)$  d'équation  $y = -x - 3$

1- Résoudre graphiquement l'équation  $f(x) = 3$

puis l'inéquation  $f(x) < 3$  .

2- Résoudre graphiquement l'équation  $f(x) = 0$

puis l'inéquation  $f(x) \geq 0$

3- Résoudre graphiquement l'équation  $f(x) = -x - 3$  puis l'inéquation  $f(x) \leq -x - 3$

**Réponses :** 1)  $f(x) = 3$  La solution est l'ensemble des antécédents de 3 :  $S = \{0; 4\}$

2-  $f(x) = 0$  La solution est l'ensemble des antécédents de 0 :  $S = \{a; b\}$  Avec  $-1 < a < -0.5$  et  $3.5 < b < 4$

$$f(x) \geq 0 \quad S = [a; 1] \cup [b; +\infty[$$

3-  $f(x) = -x - 3$  La solution l'ensemble des abscisses des points d'intersection de  $(C_f)$  et de D :  $y = -x - 3$  donc  $S = \{-1; 2; 3\}$

$$f(x) \leq -x - 3 \quad S = ]-\infty; -1] \cup [2; 3]$$

**Exercice2 :** Soient  $f$  et  $g$  les deux fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x^2 - 3x - 4$  et  $g(x) = 3x + 12$

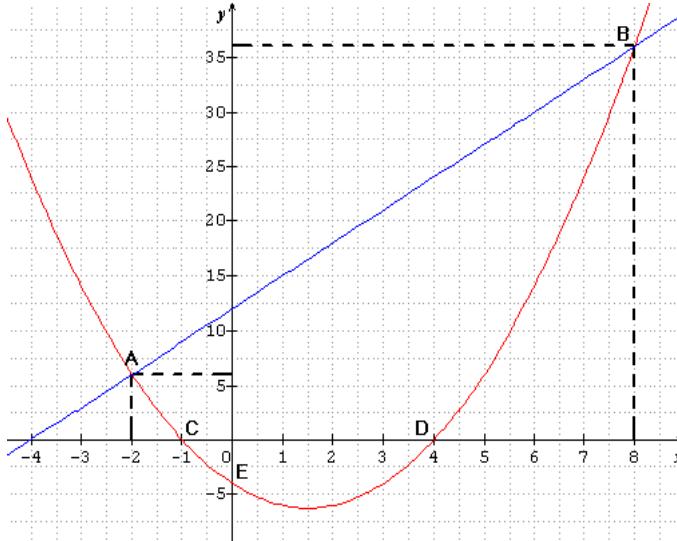
1) Tracer Les courbes  $(C_f)$  et  $(C_g)$

2) Résoudre graphiquement et algébriquement l'équation  $f(x) = g(x)$

3) Résoudre graphiquement et algébriquement l'inéquation  $f(x) \geq g(x)$

4) Trouver les points d'intersection de la courbe  $(C_f)$  avec les axes du repère

**Réponses :** 1) Les courbes représentatives  $(C_f)$  (en rouge) et  $(C_g)$  (en bleu) sont données dans le repère ci-dessous



2) a) résolution graphique de l'équation  $f(x) = g(x)$

Il suffit de chercher les abscisses des points d'intersection des courbes  $(C_f)$  et  $(C_g)$

On a donc  $x = -2$  et  $x = 8$  donc  $S = \{-2; 8\}$

b) résolution algébrique de l'équation  $f(x) = g(x)$

$$f(x) = g(x) \text{ ssi } x^2 - 3x - 4 = 3x + 12 \text{ ssi}$$

$$x^2 - 6x - 16 = 0$$

$$a = 1 \text{ et } b = -6 \text{ et } c = -16$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 1 \times (-16) = 36 + 64 = 100 = (10)^2 > 0$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-(-6) + \sqrt{100}}{2 \times 1} = \frac{6 + 10}{2} = \frac{16}{2} = 8 \text{ et}$$

$$x_2 = \frac{-(-6) - \sqrt{100}}{2 \times 1} = \frac{6 - 10}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$\text{donc } S = \{-2; 8\}$$

3) a) résolution graphique de l'inéquation  $f(x) > g(x)$

La courbe  $(C_f)$  est au-dessus de  $(C_g)$  si

$$x \in ]-\infty; -2[ \cup ]8; +\infty[$$

$$\text{Donc } S = ]-\infty; -2[ \cup ]8; +\infty[$$

b) résolution algébrique de l'inéquation  $f(x) > g(x)$

$$f(x) > g(x) \text{ ssi } x^2 - 3x - 4 > 3x + 12 \text{ ssi}$$

$$x^2 - 6x - 16 > 0$$

Les racines sont :  $x_1 = 8$  et  $x_2 = -2$

$x$	$-\infty$	$-2$	$8$	$+\infty$
$x^2 - 6x - 16$	+	0	-	0

Donc  $S = ]-\infty; -2[ \cup ]8; +\infty[$

5) a) Intersection de la courbe  $(C_f)$  avec l'axe des abscisses

Les points d'intersection C et D de la courbe  $(C_f)$  avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l'équation  $f(x) = 0$

$$f(x) = 0 \text{ ssi } x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$a = 1 \text{ et } b = -3 \text{ et } c = -4$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 9 + 16 = 25 = (5)^2 > 0$$

$$x_1 = \frac{-(-3) + \sqrt{25}}{2 \times 1} = \frac{3 + 5}{2} = \frac{8}{2} = 4 \text{ et } x_2 = \frac{-(-3) - \sqrt{25}}{2 \times 1} = \frac{-2}{2} = -1$$

donc les points d'intersection de la courbe  $(C_f)$  avec l'axe des abscisses sont :

$$C(-1; 0) \text{ et } D(4; 0)$$

b) Intersection de la courbe  $(C_f)$  avec l'axe des ordonnées

le point d'intersection de la courbe  $(C_f)$  avec l'axe des ordonnées a une abscisse nulle et on a  $f(0) = 0^2 - 3 \times 0 - 4 = -4$

donc le point d'intersection de la courbe  $(C_f)$  avec l'axe des ordonnées est :  $E(-4; 0)$

**Exercice3:** Soient f et g les deux fonctions définies sur R par :  $f(x) = -x^2 - 2x + 3$  et

$g(x) = \frac{x-1}{x+2}$  et  $(C_f)$  et  $(C_g)$  Les courbes représentatives de f et g

1) dresser le Tableau de variations de f et de g

2) a) Trouver les points d'intersection de la courbe  $(C_f)$  avec l'axes des abscisses

b) Trouver le point d'intersection de la courbe  $(C_g)$  avec l'axes des abscisses

3) Tracer Les courbes représentatives  $(C_f)$  et  $(C_g)$  dans le même repère

4) a) Résoudre graphiquement l'équation  $f(x) = g(x)$

b) Résoudre graphiquement l'inéquation  $f(x) \geq g(x)$

**Réponses :** 1)a)  $f(x) = -x^2 - 2x + 3$

on a  $f$  est une fonction polynôme donc  $D_f = \mathbb{R}$

On a  $a = -1$  et  $b = -2$  et  $c = 3$

$$(f(x) = ax^2 + bx + c)$$

$$\text{Donc } -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \times (-1)} = -1 \text{ et } (f(-1) = 4)$$

Donc la courbe  $(C_f)$  c'est une parabole de sommet  $A(-1; 4)$

et d'axe de symétrie la droite  $x = -1$

Donc le tableau de variations de f

$x$	$-\infty$	$-1$	$+\infty$
$f(x)$		↗ 4 ↘	

1)b)  $g(x) = \frac{x-1}{x+2}$  on a  $g(x) \in \mathbb{R}$  ssi  $x+2 \neq 0$

ssi  $x \neq -2$  Donc  $D_g = \mathbb{R} - \{-2\}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 1 = 3 > 0$$

$(C_g)$  est l'hyperbole de centre  $W(-2; 1)$  et d'asymptotes les droites d'équations respectives  $x = -2$  et  $y = 1$

Donc le tableau de variations de g

$x$	$-\infty$	$-2$	$+\infty$
$g(x)$	↗		↗

2)a) Intersection de la courbe  $(C_f)$  avec l'axe des abscisses

Les points d'intersection C et D de la courbe  $(C_f)$

avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l'équation  $f(x) = 0$

$$f(x) = 0 \text{ ssi } -x^2 - 2x + 3 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 4 + 12 = 16 > 0$$

$$x_1 = \frac{-(-2) + \sqrt{16}}{2 \times (-1)} = \frac{2 + 4}{-2} = \frac{6}{-2} = -3 \text{ et }$$

$$x_2 = \frac{-(-2) - \sqrt{16}}{2 \times (-1)} = 1 \text{ donc les points d'intersection}$$

de la courbe  $(C_f)$  avec l'axe des abscisses sont :

$A(-3; 0)$  et  $B(1; 0)$

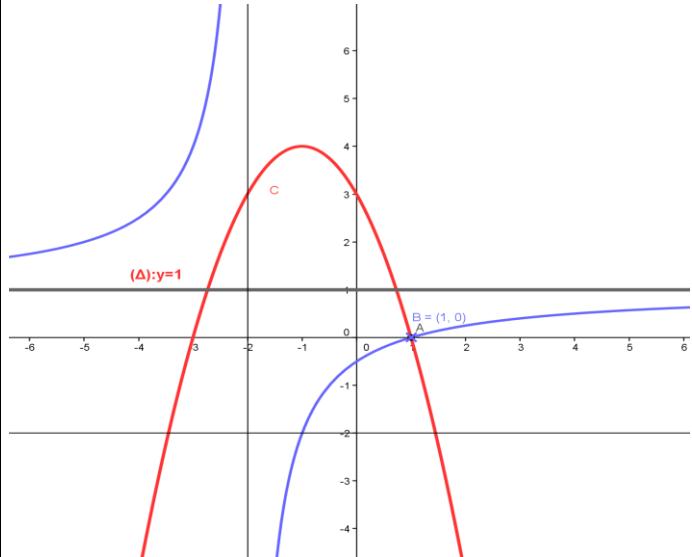
b) Intersection de la courbe  $(C_g)$  avec l'axe des abscisses

$$g(x) = 0 \text{ ssi } \frac{x-1}{x+2} = 0 \Leftrightarrow x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

le point d'intersection de la courbe  $(C_g)$  avec l'axe des abscisses est :  $C(1; 0)$

### 3) Représentation graphique

Les courbes représentatives  $(C_f)$  (en rouge) et  $(C_g)$  (en bleu) sont données dans le repère ci-dessous



4) a) résolution graphique de l'équation  $f(x) = g(x)$

$$f(x) = g(x)$$

Il suffit de chercher les abscisses des points d'intersection des courbes  $(C_f)$  et  $(C_g)$

On a donc  $x = 1$  donc  $S = \{1\}$

4)b) résolution graphique de l'inéquation  $f(x) \geq g(x)$

La courbe  $(C_f)$  est au-dessus de  $(C_g)$  si  $x \in ]-2; 1]$

Donc  $S = ]-2; 1]$

**Exemple4 :** Soit  $f$  une fonction numérique tq :

$$f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}$$

1) Déterminer  $D_f$

2) Démontrer que  $f$  est minorée.

3) Démontrer que  $f$  est majorée par  $\frac{1}{2}$ . Conclure

**Solution :** 1)  $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\} = \mathbb{R}^+$

2) soit  $x \in \mathbb{R}^+$  on a  $x + \sqrt{x} \geq x$

Donc :  $\sqrt{x+\sqrt{x}} \geq \sqrt{x}$  donc

$$f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x} \geq 0$$

$f$  est donc minorée sur  $\mathbb{R}^+$  par  $m = 0$

2) soit  $x \in \mathbb{R}^+$

$$f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x})(\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x})}{(\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x})} \geq 0$$

$$f(x) = \frac{x + \sqrt{x} - x}{(\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x})} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{\frac{x+\sqrt{x}}{x}} + 1\right)} = \frac{1}{\left(\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} + 1\right)}$$

Si  $x \in \mathbb{R}^{*+}$  :  $\frac{1}{\sqrt{x}} > 0$  donc  $1 + \frac{1}{\sqrt{x}} > 1$

donc  $\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} > 1$  donc  $\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} + 1 > 2$

donc  $\frac{1}{\left(\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} + 1\right)} < \frac{1}{2}$  donc  $f(x) < \frac{1}{2}$

et on a :  $f(0) = 0 < \frac{1}{2}$  donc  $\forall x \in \mathbb{R}^+ f(x) < \frac{1}{2}$

par suite  $f$  est majorée par  $\frac{1}{2}$ .

Conclusion :  $0 < f(x) < \frac{1}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$

$f$  est donc bornée sur  $\mathbb{R}^+$ .

**Exemple5 :** Soit  $f$  une fonction numérique tq :

$$f(x) = x^2 + 2x\sqrt{x} + x - 4$$

1) Démontrer que  $f$  admet une valeur minimale

3) Démontrer que  $f$  n'est pas majorée

**Solution :** 1)  $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\} = \mathbb{R}^+$

soit  $x \in \mathbb{R}^+$

$$f(x) = x^2 + 2x\sqrt{x} + x - 4 = x^2 + 2x\sqrt{x} + (\sqrt{x})^2 - 4$$

$$f(x) = (x + \sqrt{x})^2 - 4 \text{ donc}$$

$$f(x) + 4 = (x + \sqrt{x})^2 \geq 0$$

donc  $f(x) + 4 \geq 0$  donc  $f(x) \geq -4$

et on a :  $f(0) = -4$  donc  $f(x) \geq f(0)$

donc  $f(0) = -4$  est une valeur minimale de  $f$  au point  $x_0 = 0$

2) Démontrons que  $f$  est non majorée.

Supposons  $f$  majorée donc :

$$\exists M \in \mathbb{R} : f(x) \leq M \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^+ : (x + \sqrt{x})^2 - 4 \leq M$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^+ : (x + \sqrt{x})^2 \leq M + 4$$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^+ : x + \sqrt{x} \leq \sqrt{M + 4}$  (on peut toujours supposer  $M \geq 0$ )

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^+ : (\sqrt{x})^2 + 2 \times \frac{1}{2} \sqrt{x} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \leq \sqrt{M + 4}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^+ : \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2}\right)^2 \leq \sqrt{M + 4} + \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^+ : \sqrt{x} \leq \sqrt{\sqrt{M + 4} + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^+ : x \leq \left(\sqrt{\sqrt{M + 4} + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}\right)^2 \text{ Absurde}$$

Donc  $f$  est non majorée

**Exercice6 :** Soient  $f$  et  $g$  et  $h$  les trois fonctions définies par:

$$f(x) = \frac{6x^2 + 8x + 11}{(x-1)^2} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{2x+3}{x-1} \quad \text{et}$$

$$h(x) = x^2 + 2$$

1)a) Etudier les variations de  $g$  et de  $h$

b) étudier le signe de la fonction  $g$

2) montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\} : f(x) = (h \circ g)(x)$

3) Etudier les variations de  $f$  dans les intervalles :

$$]1; +\infty[ ; \left[-\frac{3}{2}; 1\right[ ; \left]-\infty; -\frac{3}{2}\right]$$

$$\text{Réponses :} 1)a) \quad g(x) = \frac{2x+3}{x-1}$$

on a  $g(x) \in \mathbb{R}$  ssi  $x-1 \neq 0$  ssi  $x \neq 1$

$$\text{Donc } D_g = \mathbb{R} - \{1\} \quad \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5 < 0$$

$(C_g)$  est l'hyperbole de centre  $W(1;2)$  et d'asymptotes les droites d'équations respectives  $x=1$  et  $y=2$   
Donc le tableau de variations de g

$x$	$-\infty$	1	$+\infty$
$g(x)$		↘	↘

1) on a  $h$  est une fonction polynôme donc  $D_h = \mathbb{R}$

Donc le tableau de variations de h

$x$	$-\infty$	0	$+\infty$
$h(x)$	↘	2	↗

b) étudions le signe de la fonction  $g$  sur  $\mathbb{R} - \{1\}$

$x$	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	1	$+\infty$
$2x+3$	-	0	+	+
$x-1$	-	-	0	+
$\frac{2x+3}{x-1}$	+	0	-	+

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_f \text{ et } f(x) \in D_g\}$$

2) montrons que :  $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\} : f(x) = (h \circ g)(x)$

$$(h \circ g)(x) = h(g(x)) = h\left(\frac{2x+3}{x-1}\right)$$

$$(h \circ g)(x) = \left(\frac{2x+3}{x-1}\right)^2 + 2 = \frac{4x^2 + 12x + 9 + 2x^2 - 4x + 2}{(x-1)^2}$$

$$(h \circ g)(x) = \frac{6x^2 + 8x + 11}{(x-1)^2}$$

Donc  $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\} : f(x) = (h \circ g)(x)$

3) Etude des variations de  $f$  dans les intervalles :

a) sur  $[-\infty; -\frac{3}{2}]$  :

On a  $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\} : f(x) = (h \circ g)(x)$

Puisque  $g$  est décroissante sur  $[-\infty; -\frac{3}{2}]$  et

$\forall x \in [-\infty; -\frac{3}{2}] : g(x) \in [0; +\infty[$  et  $h$  est

croissante sur  $[0; +\infty[$  alors  $f = h \circ g$  est

décroissante sur  $[-\infty; -\frac{3}{2}]$

prof : atmani najib

b) sur  $[-\frac{3}{2}; 1]$

Puisque  $g$  est décroissante sur  $[-\frac{3}{2}; 1]$  et

$\forall x \in [-\frac{3}{2}; 1] : g(x) \in ]-\infty; 0]$  et  $h$  est

décroissante sur  $]-\infty; 0]$  alors  $f = h \circ g$  est croissante sur  $[-\frac{3}{2}; 1]$

c) sur  $[1; +\infty[$  :

Puisque  $g$  est décroissante sur  $[1; +\infty[$  et

$\forall x \in [1; +\infty[ g(x) \in ]0; +\infty[$  et  $h$  est croissante sur  $]0; +\infty[$  alors  $f = h \circ g$  est décroissante sur  $[1; +\infty[$

Donc le tableau de variations de f :

$x$	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	1	$+\infty$
$f(x)$	↘	2	↗	↘

**« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »**

**Dit un proverbe.**

**C'est en s'entraînant régulièrement**

**aux calculs et exercices**

**Que l'on devient un mathématicien**

**prof: Atmani najib**

