

Exercice 1 : Donner la négation et la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes

- 1) P : " $\forall x \in \mathbb{R} / x^2 > 0$ "
- 2) P : " $\exists x \in \mathbb{R} / x^2 - 2 = 0$ "
- 3) P : $x \in [1; 2[$
- 4) P : " $\forall n \in \mathbb{N} / \frac{n}{2} \in \mathbb{N}$ "
- 5) P : $(\forall x \in \mathbb{R}); -1 \leq \cos x \leq 1$
- 6) P : $(\forall n \in \mathbb{N}); (\exists m \in \mathbb{N}) : n \prec m$
- 7) P : $(\exists n \in \mathbb{N})$ $2n+1$ est pair
- 8) P : $(\forall n \in \mathbb{N}); \sqrt{n} \in \mathbb{N}$
- 9) P : $(\forall x \in \mathbb{R}); (\exists y \in \mathbb{R}) : y - x > 0$
- 10) P : $(\exists !x \in \mathbb{R}); 2x + 4 = 0$
- 11) P : $(\exists !x \in \mathbb{R}); x^2 = 2$
- 12) P : $(\exists x \in \mathbb{Z}); \frac{x}{4} \in \mathbb{Z}$
- 13) P : $(\forall x \in \mathbb{R}); (\exists y \in \mathbb{R}) : y^2 = x$

Exercice 2 Ecrire à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes :

1. Le carré de tout réel est positif.
2. Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré.
3. Aucun entier n'est supérieur à tous les autres.
4. Tous les réels ne sont pas des quotients d'entiers.
5. Il existe un entier multiple de tous les autres.
6. Entre deux réels distincts, il existe un rationnel.

Exercice 3 : $x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}$

$$\text{Montrer que : } \begin{cases} 0 \leq x \prec 2 \\ 0 \leq y \prec 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \succ 1$$

Exercice 4 : $x \in \mathbb{R}^+$ Montrer que :

$$\frac{1}{1 + \sqrt{x}} = 1 - \sqrt{x} \Rightarrow x = 0$$

Exercice 5 : 1) Montrer que :

$$(\forall (a; b) \in \mathbb{R}^2) : a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ et } b = 0$$

2) $x \in \mathbb{R}^+$ et $y \in \mathbb{R}^+$ Montrer que:

$$x + y + 2 = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} \Rightarrow x = y = 1$$

Exercice 6 : Montrer que :

$$(\forall (a; b) \in \mathbb{R}^2) : a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow |a + b| \leq \sqrt{2}$$

Exercice 7 : Montrer que si $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{Q}$ alors $a + b \in \mathbb{Q}$

Exercice 8 : on considère la fonction définie sur

$$\mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{2} \right\} \text{ par :}$$

$$f(x) = \frac{x+2}{2x+1} \quad \text{Montrer que :}$$

$$|x-1| < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{4} |x-1| \leq |f(x) - f(1)| \leq \frac{1}{2} |x-1|$$

Exercice 9 : Montrer que : $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{n+1}{n+2} \notin \mathbb{N}$

Exercice 10 : Montrer que pour tout

$$\forall x \in [-2; 2] : 2\sqrt{2} \succ \sqrt{4-x^2}.$$

Exercice 11: Montrer que pour tout

$$\forall x \in \mathbb{R} : |x-1| \leq x^2 - x + 1.$$

Exercice 12 : résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation (E) :

$$1 - \frac{x}{4} \succ \frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

Exercice 13 : résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation (1) :

$$|x-1| + 2x - 3 \geq 0$$

Exercice 14 : Montrer que pour tout

$$\forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2 + 1} + x \succ 0.$$

Exercice 15 : résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation (1) :

$$x^2 - |x-2| + 5 = 0$$

Exercice 16 : Montrer que $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 17 : $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

Montrer que : $x \neq 2$ et $y \neq 2 \Rightarrow 2x + 2y - xy - 2 \neq 2$

Exercice 18 : $x \in \mathbb{R}$ et $x \neq -5$

$$\text{Montrer que : } x \neq -8 \Rightarrow \frac{x+2}{x+5} \neq 2$$

Exercice 19 : Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si n^2 est pair alors n est pair.

Exercice 20 : $x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}$

Montrer que : $x \neq y \Rightarrow (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$

Exercice 21 : Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$

Montrer que $n \times p$ est pair ou $n^2 - p^2$ est un multiple de 8 .

Exercice 22 : Soient $a \succ 0$ et $b \succ 0$ Montrer que si

$$\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a} \text{ alors } a = b.$$

Exercice 23 : Soit f la fonction numérique définie sur \mathbb{R}

$$\text{par : } f(x) = x^2 + 2x$$

Montrer qu'il n'existe pas de nombre positif M tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ on a : } f(x) \leq M$$

Exercice 24 : Montrer que : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Exercice 25 : (Contraposée ou absurde)

Soient $a; b \in \mathbb{Q}$

1) Montrer que : $a + b\sqrt{2} = 0 \Rightarrow a = b = 0$

2) en déduire que : $a + b\sqrt{2} = a' + b'\sqrt{2} \Rightarrow a = a'$ et $b = b'$

Exercice 26 : (absurde)

On considère l'ensemble : $A = \{1; 2; 3; 4; \dots; n\}$ avec n un nombre entier impair

Et soient $x_1; x_2; x_3; x_4; \dots; x_n$ des éléments de l'ensemble A distincts deux à deux

Montrer que : $\exists i \in A / x_i - i$ est pair

Exercice 27 : Montrer que La proposition

$$P: (\forall x \in [0; 1]) : x^2 \geq x \text{ est fausse :}$$

Exercice 28 : Montrer que La proposition

$$P: (\forall x \in \mathbb{R}) (\forall y \in \mathbb{R}) : x^2 + y^2 \geq x + y \text{ est fausse :}$$

Exercice 29 : Montrer que La proposition

$$P: (\forall (a; b) \in \mathbb{R}^2) : \sqrt{a^2 + b^2} = a + b \text{ est fausse :}$$

Exercice 30 : Montrer que La proposition suivante est fausse :

« Tout entier positif est somme de trois carrés »

(Les carrés sont les $0^2, 1^2, 2^2, 3^2, \dots$ Par exemple

$$6 = 1^2 + 1^2 + 2^2.$$

Exercice 31 : Montrer que La proposition

$$P: (\forall x \in \mathbb{R}^*) : x + \frac{1}{x} \geq 2 \text{ est fausse :}$$

Exercice 32 : on considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = 2x^2 - x + 3$ Montrer que : f n'est ni pair ni impair

Exercice 33 : Montrer que La proposition

$$P: \forall (a; b; c; d) \in \mathbb{R}^4; \begin{cases} a \neq b \\ c \neq d \end{cases} \Rightarrow a + c \neq b + d \text{ est fausse :}$$

Exercice 34 : Montrer que La proposition

$$P: (\forall x \in \mathbb{R}) (\exists y \in \mathbb{R}) : x^2 - xy + y^2 = 0 \text{ est fausse}$$

$$\text{Exercice 35 : } \forall x > 0 \quad x + \frac{1}{x} \geq 2$$

Exercice 36 : soit $x \in \mathbb{R}$ Montrer que :

$$|x - 1| \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{5} \leq \frac{1}{x+1} \leq \frac{2}{3}$$

Exercice 37 : résoudre dans \mathbb{R} l'équation (E) :

$$\sqrt{x^2 + 1} = 2x$$

Exercice 38 : $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

Montrer que : $|x - y| \leq 2\sqrt{x^2 + y^2 + xy}$

Exercice 39 : 1) Montrer que :

$$\left(\forall (a; b) \in (\mathbb{R}^+)^2 \right) : a + b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ et } b = 0$$

2) $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ Montrer que:

$$\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1} = 2 \Leftrightarrow x = y = 0$$

Exercice 40 : Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} ; 3^n \geq 1 + 2n$.

Exercice 41 : (Récurrence) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \times (n + 1)}{2}.$$

Exercice 42 : Montrer par récurrence que : pour tout entier $n \geq 5$: $2^n \geq 6n$

Exercice 43 : Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} ; n^3 + 2n$ est divisible par 3

Exercice 44 : (Récurrence) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n \times (n + 1) \times (2n + 1)}{6}.$$

Exercice 45 : (Récurrence) Montrer que pour tout

$$n \in \mathbb{N}^* : \sum_{k=1}^n k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2 \times (n + 1)^2}{4}.$$

Exercice 46 : (Récurrence) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n-1} (2k + 1) = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n + 1) = (n + 1)^2.$$

Exercice 47 : Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} ; 4^n + 6n - 1$ est divisible par 9

Exercice 48 : Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} ; 7^n - 1$ est divisible par 6

Erreur classique dans les récurrences

Exercice 49 : Pour tout entier naturel n , on considère les deux propriétés suivantes :

P(n) : $10^n - 1$ est divisible par 9

Q(n) : $10n + 1$ est divisible par 9

1) Démontrer que si P(n) est vraie alors P(n + 1) est vraie.
2) Démontrer que si Q(n) est vraie alors Q(n + 1) est vraie.

3) Un élève affirme : " Donc P(n) et Q(n) sont vraies pour tout entier naturel n.

Expliquer pourquoi il commet une erreur grave.

4) Démontrer que P(n) est vraie pour tout entier naturel n.

5) Démontrer que Q(n) est fausse pour tout entier naturel n.

On pourra utiliser un raisonnement par l'absurde.

Exercice 50 : Soit P(n) la propriété dénie sur \mathbb{N} par :

$7^n - 1$ Est divisible par 3

1) Démontrer que si P(n) est vraie alors P(n + 1) est vraie.

2) Que peut-on conclure

Exercice 51 : $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tel que : $a \in]-1; 1[$ et

$$b \in]-1; 1[\text{ Montrer que : } -1 < \frac{a+b}{1+ab} < 1$$

Exercice 52 : Traduisez les propositions suivantes en langage courant puis déterminer sa négation et la valeur de vérité :

1) $P : (\forall x \in \mathbb{R}); (\exists y \in \mathbb{R}) : x > y$

2) $P : (\exists x \in \mathbb{R}); (\forall y \in \mathbb{R}) : x > y$

3) $P : (\forall x \in \mathbb{R}); x^2 \geq 4 \Rightarrow x \geq 2$

4) $P : (\exists x \in \mathbb{R}); x^2 = 4$

5) $P : (\forall \varepsilon > 0); \left(\exists x \in \left\{ 1 + \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^* \right\} \right) / x < \varepsilon + 10$

Exercice 53 : A l'aide de la méthode des tables de vérité, dites si la formule $P \text{ ou } \overline{P}$ est une tautologie.

Exercice 54 : 1. (Raisonnement direct) Soient

$$a \in \mathbb{R}^+; b \in \mathbb{R}^+$$

Montrer que si $a \leq b$ alors $a \leq \frac{a+b}{2} \leq b$ et $0 \leq \sqrt{ab} \leq b$

2. (Cas par cas) Montrer que pour tout $\forall n \in \mathbb{N}; n(n+1)$

est divisible par 2 (distinguer les n pairs des n impairs).

4. (Absurde) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ Montrer que $\sqrt{n^2 + 1}$ n'est pas un entier.

5. (Contre-exemple) Est-ce que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$x < 2 \Rightarrow x^2 < 4 ?$$

6. (Récurrence) Fixons un réel $a \in \mathbb{R}^{+*}$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}; (1+a)^n \geq 1 + n \times a$.