Exercices d'applications

1. (Raisonnement direct) Soient $a \in \mathbb{R}^+; b \in \mathbb{R}^+$

Montrer que si $a \le b$ alors $a \le \frac{a+b}{2} \le b$ et $0 \le \sqrt{ab} \le b$

2. (Cas par cas) Montrer que pour tout $\forall n \in \mathbb{N}; n(n+1)$ est divisible par 2 (distinguer les n pairs des n impairs).

4. (Absurde) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ Montrer que $\sqrt{n^2+1}$ n'est pas un entier.

5. (Contre-exemple) Est-ce que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x < 2 \Rightarrow x^2 < 4$?

6. (Récurrence) Fixons un réel $a \in \mathbb{R}^{+*}$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}; (1+a)^n \ge 1 + n \times a$.

Exercices.

Exercice 1 : P, Q des propositions ; Ecrire la négation des propositions suivantes :
1. Toutes les voitures rapides sont rouges ;
2. Tout triangle rectangle possède un angle droit
3. Dans toutes les prisons tous les détenus détestent tous les gardiens
4. Pour tout entier x il existe un entier y tel que pour tout entier z la relation z < y implique la relation z < x + 1.
5. il existe un mouton écossais dont au moins un côté est noir
6. a) (*P et Q*) b) (*non P et non Q*) c) (*P* $\Rightarrow$ *Q*)

Exercice 2 : Supposons que les chiens aboient et que la caravane passe. Traduisez les propositions suivantes
En langage propositionnel. On note *p* : les chiens aboient et *q* : la caravane passe.
a) Si la caravane passe, alors les chiens aboient.
b) Les chiens n'aboient pas.
c) La caravane ne passe pas ou les chiens aboient.
d) Les chiens n'aboient pas et la caravane ne passe pas.

Exercice 3 : Démontrer les énoncés suivants par récurrence :

1) $\forall n \in \mathbb{N}$ $n^3 - n$ est divisible par 6

2) $\forall n \in \mathbb{N}$ $n^5 - n$ est divisible par 30

3) $\forall n \in \mathbb{N}$ $n^7 - n$ est divisible par 42

Exercice 4 : Déterminer les valeurs de vérité des propositions suivantes :
1. (3 est un nombre impair) ⇒ (6 est un nombre premier)
2. ($\sqrt{2}$ est un nombre irrationnelle) ⇒ [$(\forall x \in \mathbb{R})$ $(1 + 2x < x^2)$]
3. (5 est positif) ⇒ (3 divise 18)

Exercice 5 :
1)Donner une condition nécessaire et pas suffisante pour :
a) $x \in [1,2]$
b) n divise 6
2)Donner une condition suffisante et pas nécessaire pour :
a) $x \in [1,2]$
b) n divise 6.

Exercice 6 : Etudier la vérité des propositions suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R} : 2x^2 + x + 3 \succ 0$

2. $\forall (a;b) \in \mathbb{Q}^{*2} : a\sqrt{2} + b \ne 0$

3. $\forall n \in \mathbb{N}^* : \frac{n+1}{n} \notin \mathbb{N}$

Exercice 7 : écrire la négation des propositions suivantes

$Q; (\exists x \in \mathbb{R}) : x < 2 \Rightarrow x^2 \ge 2019$ $P; (\forall x \in \mathbb{R}) : x \ne 2 \Rightarrow x^2 \ne 4$

Exercice 8 : Écrire à l'aide des Quantificateurs la phrase suivante :
1) « Pour tout nombre réel, son carré est positif ».
2) « Pour chaque réel, je peux trouver un entier relatif tel que leur produit soit strictement plus grand que 1 ».
3)« Pour tout entier n, il existe un unique réel x tel que $x \succ n$».

Exercice 9 : Ecrire avec des Quantificateurs les propositions suivantes puis dans chaque cas dire si la proposition est vraie ou fausse.

1)Tout entier naturel est pair ou impair.

2)Tout entier naturel est pair ou tout entier naturel est impair.

3)Il y a un entier plus grand que tous les entiers.

Exercice 10 : Ecrire avec des Quantificateurs les propositions suivantes :

1)f est constante sur $\mathbb{R}$ (où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).

2)f n'est pas constante sur $\mathbb{R}$

Exercice 11 : En utilisant le raisonnement par contraposé montrer que :
si $x \in \left]1 ; +\infty\right[$ et $y \in \left]1 ; +\infty\right[$
$x \neq y \Rightarrow x^2 - 3x \neq y^2 - 3y$

Exercice 12 : Etudier la vérité des propositions suivantes :
1. $\exists x \in \mathbb{R} : \left|x^2 - x\right| + 3x = 0$
2. $\exists x \succ 0 : x^2 + 3x = 0$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien