01.

1. Déterminer la valeur de vérité et la négation de chaque proposition suivante .

a. $\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ x^2 \le x \Rightarrow |x| = x$

b. $x \in \mathbb{R}\ ;\ \left(x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2\right)$.

c. $(7 < 5 \text{ et } 2+1=3)$ ou $(-3 \in \mathbb{N})$

d. $(7 < 5 \Rightarrow 2+1=0)$ ou $(-3 \in \mathbb{N})$

e. $\exists n \in \mathbb{Z}\ ,\ n^2 \le n$. $\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ x^2 < x$.

f. $\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ \exists y \in \mathbb{R}\ ,\ x - y + 3 = 0$. $\exists y \in \mathbb{R}\ ,\ \forall x \in \mathbb{R}\ ,\ x - y + 3 = 0$.

g. $\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ \sqrt{x^2+3} \ge 2 \Leftrightarrow x \ge 1$.

02.

Ecrire les expressions suivantes on utilise les quantificateurs qui correspond .

a. Le carré d'un nombre réel est positif .

b. Il n'existe pas un nombre rationnel est solution de l'équation $x^2 - 3 = 0$.

c. Pour tout nombre entier naturel n, il existe au moins un entier naturel k til que $k \le n$.

03.

Déterminer la valeur de vérité qui suit

a. $x \in \mathbb{R}\ ;\ \left(x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2\right)$.

b. $(7 < 5 \text{ et } 2+1=3)$ ou $(-3 \in \mathbb{N})$.

c. $(7 < 5 \Rightarrow 2+1=0)$ ou $(-3 \in \mathbb{N})$.

d. $\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ x^2 \le x \Rightarrow |x| = x$.

04.

1. On utilise le raisonnement par contre exemple , montrer que la relation suivante est fausse :
$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ \exists y \in \mathbb{R} : xy = 2$.

2. On utilise le raisonnement par contre posé , montrer que :
$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : (x \ne 1 \wedge y \ne 1) \Rightarrow xy + 1 \ne x + y$.

3. On utilise le raisonnement par contre posé , tel que a et b de $\mathbb{R}$ avec $b \ne 2a$ montrer que :
$$b \ne \frac{a}{4} \Rightarrow \frac{a+2b}{2a-b} \ne \frac{6}{7} .$$

4. Sachant que : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ montrer par raisonnement par l'absurde que : $\forall r \in \mathbb{Q}\ ,\ r + \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

5. On utilise le raisonnement par l'absurde

a. montrer que : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : a + b = 0 \Rightarrow (a = 0 \ \wedge\ b = 0)$.

b. on déduit que : les solutions de l'équation suivante : $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0$.

6. On utilise le raisonnement par disjonctions des cas , montrer que : $\forall n\in\mathbb{N},\frac{n\left(n^2+1\right)}{2}\in\mathbb{N}$.

7. On utilise le raisonnement par des équivalences successives montrer que $\left(p\Rightarrow(q\Rightarrow r)\right)\Leftrightarrow\left((p \text{ et } q)\Rightarrow r\right)$

8. Soient x et y de $\mathbb{R}^+$, montrer que : $x+y+2=2\sqrt{x}+2\sqrt{y}\Rightarrow x=y=1$.

05.

Soient p et q deux propositions , montrer par deux méthodes différentes que chaque proposition est une loi logique :

a. $p\Rightarrow(q\Rightarrow p)$.

b. $p\Rightarrow\left(\overline{p}\Rightarrow q\right)$.

c. $(\rceil p\Rightarrow q)\Rightarrow p$ est elle proposition ?.

06.

On considère l'implication suivante $P(a,b)$: $a+b+ab+1=0\Rightarrow(a=-1 \text{ ou } b=-1)$.

1. Déterminer l'implication contre posée de $P(a,b)$.

2. Déterminer la négation de $P(a,b)$.

3. Montrer que $P(a,b)$ est une implication vraie.

07.

On considère l'implication suivante P :

" $\forall x\in[0,+\infty[,\forall y\in[1,+\infty[:\left(\sqrt{x}+\sqrt{y-1}=\frac{1}{2}(x+y+1)\right)\Rightarrow(x=1 \text{ et } y=2)$ ".

1. Ecrire P sans utiliser le connecteur logique $\Rightarrow$ et sans utiliser l'expression : « si …alors … » .

2. Déterminer la négation de P .

3. Déterminer l'implication contre posée de P .

4. Déterminer la valeur de vérité de P .

08.

On utilise le raisonnement par , montrer que :

a. Pour tout n de $\mathbb{N}$, le nombre $3^{3n+2}+2^{n+4}$ est divisible par 5 .

b. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, le nombre $3^{3n+2}+2^{n+4}$ est divisible par 5 .

c. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$,3 divise le nombre $4n^3-n$.

d. Pour tout n de $\mathbb{N}$,8 divise le nombre $1+5^{n+1}+2\times3^n$.

e. Pour tout n de $\mathbb{N}$,9 divise le nombre 4^n+6n-1 .

f. Pour tout n de $\mathbb{N}$,17 divise le nombre $3\times5^{2n+1}+2^{3n+1}$.

g. $\forall n\in\mathbb{N}$: $1+3+5+7+\cdots+(2n+1)=\sum_{i=0}^{i=n}(2i+1)=(n+1)^2$

h. $\forall n\in\mathbb{N}^*\ :\ 1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+n\times(n+1)=\sum_{i=1}^{i=n} i(i+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

i. $\forall n\in\mathbb{N}^*\ :\ \sum_{i=1}^{i=n}\frac{1}{(2i-1)(2i+1)}=\frac{n}{2n+1}.$

j. $\forall n\in\mathbb{N}^*\ :\ \sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k(k+2)}=\frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}.$

k. $\forall n\in\mathbb{N}^*\ :\ \sum_{k=1}^{k=n}k(n+k)=\frac{n(n+1)(5n+1)}{6}$