

I. PROPOSITION - FONCTION PROPOSITIONNELLE – LES QUANTIFICATEURS :

A. PROPOSITION :

a. Définition :

On appelle une proposition un énoncé mathématique (texte mathématique) qui a un sens pouvant être vrai ou faux (mais pas les deux en même temps). Et , on note souvent une proposition par les lettres P , Q ou R ..etc .

b. Valeur de vérité d'une proposition :

- Si la proposition est vraie on note V ou 1 .
- Si la proposition est fausse on note F ou 0 .
- Tableau de vérité d'une proposition est ci-contre

p
1
0

c. Exemples :

P « 2 est un nombre pair » proposition est vraie . Q « $2+3=6$ » proposition est fausse .

R « ABCD est un parallélogramme alors les diagonales se coupe sur leur milieux » . proposition est vraie

B. FONCTION PROPOSITIONNELLE

a. Définition :

On appelle une fonction propositionnelle, tout énoncé contenant une variable x ou plusieurs variables (x, y, z, \dots) et qui appartient à des ensembles déterminé . on note $P(x)$ ou $P(x, y, z, \dots)$

b. Remarque :

si on remplace les variables par un élément de ces ensembles , la fonction propositionnelle devient une proposition .

c. Exemple :

- ☒ A(x) : « pour tout x de \mathbb{R} on a $\sqrt{x^2} = x$ » est une fonction propositionnelle .
 - si $x = 2$ on obtient une proposition vraie .
 - si $x = -3$ on obtient une proposition fausse .
- ☒ A(x,y) : « pour tout x et y de \mathbb{R} on a : $|x+y| = |x| + |y|$ » est une fonction propositionnelle .
 - si $x = 2$ et $y = 5$ on obtient une proposition vraie .
 - si $x = -2$ et $y = 5$ on obtient une proposition fausse .

C. les quantificateurs :

a. Quantificateur universel :

l'expression suivante « pour tout x de E la proposition $Q(x)$ est vraie » . On la note : « $\forall x \in E, Q(x)$ » .

- Le symbole \forall s'appelle quantificateur universel et il se lit : pour tout .. ou quel que soit ..
- Exemples : « $\forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2} = |x|$ » . « $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : |x+y| \leq |x| + |y|$ »

b. Quantificateur existentiel:

l'expression suivante « il existe un x de E la proposition $Q(x)$ est vraie » .

On la note : « $\exists x \in E, Q(x)$ » .

- Le symbole \exists s'appelle quantificateur existentiel et il se lit : il existe ..
- Exemples : « $\exists x \in \mathbb{R} : x+4 \leq 3$ » . « $\exists a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R}, \exists c \in \mathbb{R} : a^3 + b^3 = c^2$ » ($a = 1; b = 2, c = 3$)

c. Le symbole $\exists!$:

l'expression suivante « il existe un unique x de E la proposition $Q(x)$ est vraie » . On la note : « $\exists! x \in E, Q(x)$ » .

- Exemple : « $\exists! x \in \mathbb{R} : x+4 = 3$ »

d. Remarques :

- ☒ L'ordre des quantificateurs identiques (universel ou bien existentiel) ne change pas le sens de la fonction propositionnelle.
- ☒ L'ordre des quantificateurs non identiques (universel et existentiel) change le sens de la fonction propositionnelle.
- ☒ La négation du quantificateur : \forall est le quantificateur \exists .
- ☒ La négation du quantificateur : \exists est le quantificateur \forall .
- ☒ Les écritures suivantes sont équivalentes $\forall x \in E, \forall y \in E$ ou $\forall x, y \in E$ ou $\forall(x, y) \in E \times E$.
- ☒ Les écritures suivantes sont équivalentes $\exists x \in E, \exists y \in E$ ou $\exists x, y \in E$ ou $\exists(x, y) \in E \times E$.

II. LES OPERATIONS SUR LES PROPOSITIONS :

01. La négation d'une proposition :

a. Définition :

La négation d'une proposition P est la proposition qu'on note \bar{P} ou $\neg P$ tel que les valeurs de vérité de P et \bar{P} sont opposées .

b. Exemple : P « 2 est un nombre pair » sa négation est \bar{P} « 2 est un nombre impair »

c. Tableau de vérité la négation d'une proposition :

d. Propriété : $\bar{\bar{p}} = p$ ou encore $\neg(\neg p)$.

p	$\bar{p} = \neg p$
1	0
0	1

02. La conjonction de deux propositions - La disjonction de deux propositions .

A. La conjonction de deux propositions :

a. Définition :

La conjonction de deux propositions $P \wedge Q$ est la proposition notée $P \wedge Q$ ou bien $P \text{ et } Q$; et elle est vraie seulement dans le cas où P et Q sont toutes les deux vraie .

b. Tableau de vérité de $P \wedge Q$ est :

c. Exemple :

- $(2 \text{ est un nombre pair}) \wedge (2+3=6)$ est une proposition fausse.
- $(2 \text{ est un nombre pair}) \wedge (2+3=6)$ ou encore
 $(2 \text{ est un nombre pair}) \text{ et } (2+3=6)$

p	q	$P \wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

B. La disjonction de deux propositions :

a. Définition :

La disjonction de deux propositions $P \vee Q$ est la proposition notée $P \vee Q$ ou bien $P \text{ ou } Q$; et elle est fausse seulement dans le cas où P et Q sont toutes les deux fausses .

b. Tableau de vérité de $P \vee Q$ est :

c. Exemple :

- $(2 \text{ est un nombre pair}) \vee (2+3=6)$
ou encore $(2 \text{ est un nombre pair}) \text{ ou } (2+3=6)$
- $(2 \text{ est un nombre pair}) \vee (2+3=6)$ est une proposition vraie .

p	q	$P \vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

d. Propriétés :

- La conjonction et la disjonction sont commutatives : $P \wedge Q = Q \wedge P$; $P \vee Q = Q \vee P$

- La conjonction et la disjonction sont **associatives** :

$$(P \wedge Q) \wedge R = P \wedge (Q \wedge R) ; (P \vee Q) \vee R = P \vee (Q \vee R).$$
- La **négation** de la conjonction et la **négation** de la disjonction :

$$\neg(P \wedge Q) = \neg P \vee \neg Q \text{ ou bien } \overline{P \wedge Q} = \overline{P} \vee \overline{Q}$$

$$\neg(P \vee Q) = \neg P \wedge \neg Q \text{ ou bien } \overline{P \vee Q} = \overline{P} \wedge \overline{Q}$$
- La conjonction est **distributive sur** la disjonction - La disjonction est **distributive sur** la conjonction

$$P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \text{ de même } (Q \vee R) \wedge P = (Q \wedge P) \vee (R \wedge P) .$$

$$P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R) \text{ de même } (Q \wedge R) \vee P = (Q \vee P) \wedge (R \vee P) .$$

e. **Remarque :**

- $P \wedge P = P$ de même $P \vee P = P$.

03. L'implication de deux propositions :

a. **Définition :**

l'implication de deux propositions P puis Q est la proposition $\overline{P} \vee Q$; qu'on note par $P \Rightarrow Q$ on lit P implique Q .

b. **Tableau de vérité de $P \Rightarrow Q$ est :**

c. **Remarque :**

- La proposition P s'appelle les données (ou hypothèses) de l'implication.
- La proposition Q s'appelle la conclusion de l'implication.
- L'implication $P \Rightarrow Q$ est fausse seulement dans le cas P est vraie et Q est fausse .
- L'implication $Q \Rightarrow P$ s'appelle l'implication réciproque de l'implication $P \Rightarrow Q$ (vis versa)
- L'implication $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ s'appelle la contre posée de l'implication $P \Rightarrow Q$.
- Si $P \Rightarrow Q$ on n'a pas forcément $Q \Rightarrow P$.

p	q	$P \Rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

d. **Exemple :**

- $(\underbrace{2 \text{ est un nombre pair}}_{\text{vraie}}) \Rightarrow (\underbrace{2+3=6}_{\text{fausse}})$ est une **proposition fausse**.
- $(\underbrace{2+3=6}_{\text{fausse}}) \Rightarrow (\underbrace{2 \text{ est un nombre pair}}_{\text{vraie}})$ est une **proposition vraie** .

e. **Propriétés :**

- L'implication est transitive : $[(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow (P \Rightarrow R)$.
- La négation de l'implication : $\neg(P \Rightarrow Q) = \overline{P \Rightarrow Q} = P \wedge \overline{Q}$.
- La contraposée : $P \Rightarrow Q = \overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$

04. L'équivalence de deux propositions :

a. **Définition :**

l'équivalence de deux propositions $P \Leftrightarrow Q$ est la proposition $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ note par $P \Leftrightarrow Q$ on lit P est équivalente à Q ou bien P si et seulement si Q .

b. **Tableau de vérité de $P \Leftrightarrow Q$ est :**

p	q	$P \Leftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

c. Exemple : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x^2 = y^2 \Leftrightarrow (x = y \text{ ou } x = -y)$

d. Propriétés :

- $(P \Leftrightarrow Q) = (Q \Leftrightarrow P)$; $(P \Leftrightarrow Q) = (\bar{P} \Leftrightarrow \bar{Q})$.
- $\overline{(P \Leftrightarrow Q)} = \overline{(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)} = (P \wedge \bar{Q}) \vee (\bar{Q} \wedge \bar{P})$
- L'équivalence est transitive : $[(P \Leftrightarrow Q) \wedge (Q \Leftrightarrow R)] \Rightarrow (P \Leftrightarrow R)$

05. Lois logiques :

a. Définition :

Une loi logique est une proposition qui est vraie quel que soit la vérité des propositions qui la constituent .

b. Exemple :

- Lois de Morgan : $\overline{P \wedge Q} = \bar{P} \vee \bar{Q}$; $\overline{P \vee Q} = \bar{P} \wedge \bar{Q}$.
- $(P \wedge Q) \Rightarrow P$. Preuve : $((P \wedge Q) \Rightarrow P) \Leftrightarrow \overline{(P \wedge Q)} \vee P$
 $\Leftrightarrow (\bar{P} \vee \bar{Q}) \vee P$
 $\Leftrightarrow \underbrace{(\bar{P} \vee P)}_{\text{vraie}} \vee \underbrace{\bar{Q}}_{\text{est toujours vraie}}$

Donc $(\bar{P} \vee P) \vee \bar{Q}$ est toujours vraie d'où $(P \wedge Q) \Rightarrow P$ est une loi logique .

III. TYPES DE RAISONNEMENTS :

01. Raisonnement par contre exemple :

a. Définition :

Pour prouver que la propriété suivante est fausse : $\forall x \in E, P(x)$ il suffit de prouver que

$\exists x \in E, \overline{P(x)}$ est vraie (c.à.d. de trouver un élément x de E qui ne vérifie pas $P(x)$ ce qu'on appelle un contre exemple).

Ce mode de raisonnement s'appelle raisonnement par contre exemple .

b. Exemple : est ce que la somme de deux nombres irrationnelles est un nombre irrationnelle ?

$\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ sont deux nombres irrationnelles mais leur somme $-\sqrt{2} + \sqrt{2} = 0$ n'est pas un nombre irrationnel.

02. Raisonnement par des équivalences successives :

a. Définition :

Pour démontrer que l'équivalence suivant $P \Leftrightarrow Q$ est vrai , on démontrer que : $P \Leftrightarrow Q_1$ et $Q_1 \Leftrightarrow Q_2$ et $Q_2 \Leftrightarrow Q_3$ et et $Q_n \Leftrightarrow Q$.

Ce mode de raisonnement s'appelle raisonnement par des équivalences successives .

b. Exemple : montrer que $\forall a, b \in \mathbb{R} : a^2 + b^2 = 2ab \Leftrightarrow a = b$.

$$\text{On a : } a^2 + b^2 = 2ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab = 0$$

$$\Leftrightarrow (a - b)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a - b = 0$$

$$\Leftrightarrow a = b$$

Conclusion : $\forall a, b \in \mathbb{R} : a^2 + b^2 = 2ab \Leftrightarrow a = b$

03. Raisonnement déductif :**a. Définition :**

Si on a l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie et on a dans un exercice comme donnée la proposition P donc on déduit que la proposition Q est vraie.

Ce mode de raisonnement s'appelle raisonnement par **déduction**.

b. Exemple :

- On suppose qu'on a démontré : $\forall a, b > 0, \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

- On déduit que : $\forall x > 0, 2\sqrt{x} \leq 1+x$

D'après la 1^{ère} question on pose $a = 1$ et $b = x$ d'où $\sqrt{1 \times x} \leq \frac{1+x}{2}$ donc $2\sqrt{x} \leq 1+x$

Conclusion : $\forall x > 0, 2\sqrt{x} \leq 1+x$

04. Raisonnement par la contraposée :**a. Définition :**

Pour démontrer l'implication suivante $P \Rightarrow Q$ il suffit de démontrer l'implication suivante $\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$.

Ce mode de raisonnement s'appelle raisonnement par la **contraposée**.

b. Exemple : montrer que $\forall x, y \in]2, +\infty[$, $x \neq y \Rightarrow x^2 - 4x \neq y^2 - 4y$.

On utilise un raisonnement par contraposée pour cela on démontre :

$$\forall x, y \in]2, +\infty[, x^2 - 4x = y^2 - 4y \Rightarrow x = y .$$

Soient x et y de $]2, +\infty[$ tel que $x^2 - 4x = y^2 - 4y$.

$$x^2 - 4x = y^2 - 4y \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = y^2 - 4y + 4$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 = (y-2)^2$$

$$\Rightarrow x-2 = y-2 \text{ et } x-2 = -(y-2)$$

$$\Rightarrow x = y \text{ et } x+y-4 = 0$$

$$\Rightarrow x = y$$

$x+y-4=0$ est impossible car $x > 2$ et $y > 2$ d'où $x+y > 4$ ou encore $x+y-4 > 0$.

Donc $x^2 - 4x = y^2 - 4y \Rightarrow x = y$ est une implication vraie c.à.d. l'implication contraposée est vraie

Conclusion : $\forall x, y \in]2, +\infty[, x \neq y \Rightarrow x^2 - 4x \neq y^2 - 4y$

05. Raisonnement par disjonction des cas :**a. Définition :**

Lorsqu'on utilise plusieurs cas dans une démonstration le raisonnement utilisé s'appelle raisonnement par **disjonction des cas**.

b. Exemple : résoudre l'équation suivante $x \in \mathbb{R} : |x+1| + 2x = 0$.

L'équation s'écrit aussi $x \in]-\infty, -1] \cup [-1, +\infty[: |x+1| + 2x = 0$

1^{er} cas $x \in]-\infty, -1]$

$$|x+1| + 2x = 0 \Leftrightarrow -(x+1) + 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow x-1=0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \notin]-\infty, -1]$$

D'où : $S_1 = \emptyset$.

2^{ième} cas $x \in [-1, +\infty[$.

$$|x+1| + 2x = 0 \Leftrightarrow (x+1) + 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{3} \in [-1, +\infty[$$

Donc : $S_2 = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$.

Conclusion : $S = S_1 \cup S_2 = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$.

06. Raisonnement par absurdité :

a. Définition :

Pour démontrer qu'une proposition Q (conclusion ou résultat) et on a parmi les données la proposition P

- On suppose que \bar{Q} (la négation du conclusion) est vraie et au cours de la démonstration on obtient que \bar{P} est vraie d'où P et \bar{P} sont vraies ce qui est impossible.
- Donc notre supposition \bar{Q} est vraie est absurde ; d'où Q est vraie.
- Ce mode de raisonnement s'appelle raisonnement par **absurde**.

b. Exemple :

Montrer que : s est un nombre irrationnelle.

O suppose que s est un nombre rationnelle.

On a $s = r + i \Leftrightarrow i = s - r$

- d'où $s - r$ est un nombre rationnelle (1) car la somme de rationnelles est un nombre rationnelle.
- $i = s - r$ et i est nombre irrationnelle (2).
- D'après (1) et (2) on a une contradiction d'où la supposition (s est un nombre rationnelle) est fausse

Conclusion : la somme d'un nombre rationnelle r et un nombre irrationnelle i est un nombre irrationnelle.

07. Raisonnement par récurrence :

a. Définition :

Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $P(n)$ une relation portant sur les entiers naturels n tel que $n \geq n_0$.

Pour démontrer que la relation $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$. On utilise les étapes suivantes :

- On vérifie que : $P(n)$ est vraie pour $n = n_0$ (c.à.d. $P(n_0)$ est vraie).
- On suppose que : $P(n)$ est vraie pour n avec $n \geq n_0$. La supposition s'appelle hypothèse de récurrence
- On démontre que : la relation $P(n)$ est vraie pour $n + 1$ (c.à.d. $P(n + 1)$ est vraie)
- Ce mode de raisonnement s'appelle raisonnement par **récurrence**

b. **Exemple :** montrer que : pour tout n de \mathbb{N} on a 3 divise $n^3 - n$ (c.à.d. $3 \mid (n^3 - n)$ (1))

Remarque : $3 \mid (n^3 - n) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} / n^3 - n = 3k$

- On vérifie que la relation (1) est vraie pour $n = 0$.

Pour $n = 0$ on a $n^3 - n = 0^3 - 0 = 0 = 3 \times 0$ donc $3 \mid (0^3 - 0)$ d'où la relation (1) est vraie pour $n = 0$

- On suppose que : la relation (1) est vraie pour n (et n de \mathbb{N}) c.à.d. $3 \mid (n^3 - n)$, (ou $\exists k \in \mathbb{N} / n^3 - n = 3k$) . **hypothèse de récurrence**

- On démontre que : la relation (1) est vraie pour $n + 1$ (c.à.d. $3 \mid ((n+1)^3 - (n+1))$ est vraie)

$$\text{On a : } (n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1$$

$$= n^3 - n + 3n^2 + 3n$$

$$= 3k + 3(n^2 + n) \quad (\text{hypothèse de récurrence})$$

$$= 3(k + n^2 + n)$$

$$= 3K \quad (K = k + n^2 + n \in \mathbb{N})$$

Donc : $(n+1)^3 - (n+1) = 3K$ par suite $3 \mid ((n+1)^3 - (n+1))$

D'où la relation (1) est vraie pour $n + 1$.

Conclusion $\forall n \in \mathbb{N} : 3 \mid (n^3 - n)$

08. Symboles \sum et \prod et les lettres grecque :

a. **Symbole \sum :**

La somme suivante : $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ on la note par $\sum_{i=1}^{i=n} a_i$ (on utilise i ou j ou k sont des variables muettes)

- Exemple 1 : $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = \sum_{i=1}^{i=n} 2i$ (cet une somme qui est constitué par $n + 1$ termes).

- Exemple 2 : $1 + 3 + 5 + \dots + (2n + 1) = \sum_{i=1}^{i=n} (2i + 1)$ (cet une somme qui est constitué par n termes).

- Propriétés :

$$\diamond \quad \sum_{j=0}^{j=n} (a_j + b_j) = \sum_{j=0}^{j=n} a_j + \sum_{j=0}^{j=n} b_j = \sum_{k=0}^{k=n} a_k + \sum_{k=0}^{k=n} b_k .$$

$$\diamond \quad \sum_{j=1}^{j=n} (a_j + c) = \sum_{j=1}^{j=n} a_j + nc \quad (\text{car la somme contient } n \text{ termes et chaque terme est } a_j + c).$$

b. **Symbole \prod :**

Le produit suivant : $a_1 \times a_2 \times a_3 \times \dots \times a_n$ on la note par $\prod_{j=1}^{j=n} a_j$ (on utilise i ou j ou k sont des variables muettes)

- Exemple 1 : $\sum_{j=0}^{j=n} (a_j + b_j) = \prod_{j=0}^{j=n} a_j \times \prod_{j=0}^{j=n} b_j = \prod_{k=0}^{k=n} a_k \times \prod_{k=0}^{k=n} b_k$ (cet un produit qui est constitué par $n+1$ termes).
- Exemple 2 : $\prod_{j=1}^{j=n} (ca_j) = c^n \prod_{j=1}^{j=n} a_j$ (cet un produit qui est constitué par n termes et chaque terme est $c \times a_i$).

c. Exercices :

Montrer que :

$$1. \quad \forall n \in \mathbb{N}^* : 1 + 2 + 3 + \dots + n = \sum_{i=1}^{i=n} i = \frac{n(n+1)}{2} .$$

$$2. \quad \forall n \in \mathbb{N}^* : 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \sum_{i=1}^{i=n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} .$$

$$3. \quad \forall n \in \mathbb{N}^* : 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \sum_{i=1}^{i=n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 .$$

d. Les lettres grecque :

ν	nu	α	alpha
ξ	xi	β	beta
ο	omicron	γ ou Γ	gamma
π ou Π	pi	δ ou Δ	delta
ρ	rho	ε	epsilon
σ ou Σ	sigma	ζ	zêta
τ	tau	η	êta
υ	upsilon	θ ou Θ	thêta
φ ou Φ	phi	ι	iota
χ	chi	κ	kappa
ψ ou Ψ	psi	λ ou Λ	lambda
ω ou Ω	oméga	μ	mu