

1- إحداثيات نقطة بالنسبة لمعلم، إحداثيات متجهة بالنسبة لأساس / الأساس - المعلم في الفضاء

نشاط ليكن $OIJK$ رباعي الأوجه و M نقطة من الفضاء و P مسقطها على المستوى (OIJ) بتواز مع (OK) و Q مسقط P على (OI) بتواز مع (OJ) و Q' مسقط P على (OJ) بتواز مع (OI) و Q'' مسقط M على (OK) بتواز مع (OIJ)

1- أنشئ الشكل

2- باعتبار x أفصول Q بالنسبة للمعلم $(O;I)$ و y أفصول Q' بالنسبة للمعلم $(O;J)$ و z أفصول Q'' بالنسبة للمعلم $(O;K)$

أكتب $\overrightarrow{OM}$ بدلالة x و y و $\overrightarrow{OI}$ و $\overrightarrow{OJ}$ و $\overrightarrow{OK}$

1- الشكل

2- نكتب $\overrightarrow{OM}$ بدلالة x و y و $\overrightarrow{OI}$ و $\overrightarrow{OJ}$ و $\overrightarrow{OK}$

لدينا Q مسقط P على (OI) بتواز مع (OJ)

و Q' مسقط P على (OJ) بتواز مع (OI)

ومنه $(OQPQ')$ متوازي الأضلاع و بالتالي $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OQ'}$

و حيث x أفصول Q بالنسبة للمعلم $(O;I)$

و y أفصول Q' بالنسبة للمعلم $(O;J)$

فان $\overrightarrow{OQ} = x\overrightarrow{OI}$ و $\overrightarrow{OQ'} = y\overrightarrow{OJ}$

ومنه $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ}$

لدينا Q'' مسقط M على (OK) بتواز مع (OIJ)

و P مسقطها على المستوى (OIJ) بتواز مع (OK)

ومنه $(OPMQ'')$ متوازي الأضلاع ومنه $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ''}$

و حيث أن z أفصول Q'' بالنسبة للمعلم $(O;K)$ فان $\overrightarrow{OQ''} = z\overrightarrow{OK}$

إذن $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ} + z\overrightarrow{OK}$

و بما أن $OIJK$ رباعي الأوجه فان I و J و K و O غير مستوائية

نقول إن المثلث $(x; y; z)$ إحداثيات M بالنسبة للمعلم $(O; \overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ}; \overrightarrow{OK})$ نكتب $M(x; y; z)$

تعريف

إذا كانت $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ ثلاث متجهات غير مستوائية و O نقطة من الفضاء .
نقول إن المثلث $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ أساس للفضاء، و أن المربع $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ معلم للفضاء

ملاحظة:

أربع نقط غير مستوائية O و A و B و C تحدد أساسا مثلا $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OC})$

و معلما للفضاء مثلا $(O; \overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OC})$

خاصية

ليكن $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ معلما في الفضاء

لكل نقطة M من الفضاء توجد ثلاثة أعداد حقيقية وحيدة x و y و z حيث $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

المثلث $(x; y; z)$ يسمى إحداثيات M بالنسبة للمعلم $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ نكتب $M(x; y; z)$

لكل متجهة $\vec{u}$ من الفضاء توجد ثلاثة أعداد حقيقية وحيدة x و y و z حيث $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

المثلث $(x; y; z)$ يسمى إحداثيات $\vec{u}$ بالنسبة للأساس $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ نكتب $\vec{u}(x; y; z)$

لتكن $\vec{u}(x; y; z)$ و $\vec{v}(x'; y'; z')$ متجهتين من الفضاء المنسوب إلى الأساس $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ و λ عددا حقيقيا

* $\vec{u} = \vec{v}$ إذا وفقط إذا كان $x = x'$ و $y = y'$ و $z = z'$

* $\vec{u} + \vec{v}(x + x'; y + y'; z + z')$

* $\lambda \vec{u}(\lambda x; \lambda y; \lambda z)$

خاصية

لتكن $A(x_A; y_A; z_A)$ و $B(x_B; y_B; z_B)$ نقطتين من الفضاء المنسوب إلى المعلم $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ و I منتصف القطعة $[AB]$

* مثلوث إحداثيات $\overline{AB}$ هو $(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$

* مثلوث إحداثيات I هو $\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$

2- الشرط التحليلي لاستقامية متجهتين

نشاط

لتكن $\vec{u}(a; b; c)$ و $\vec{v}(a'; b'; c')$ متجهتين من الفضاء

أ/ بين أنه إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيمتين فإن $ab' - a'b = 0$ و $bc' - b'c = 0$ و $ac' - a'c = 0$

ب/ بين أنه إذا كان $ab' - a'b = 0$ و $bc' - b'c = 0$ و $ac' - a'c = 0$ فإن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيمتان

مبرهنة

لتكن $\vec{u}(a; b; c)$ و $\vec{v}(a'; b'; c')$ متجهتين من الفضاء

* تكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيمتين إذا وفقط إذا كان $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = 0$ و $\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} = 0$ و $\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} = 0$

* تكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيمتين إذا وفقط إذا كان $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \neq 0$ أو $\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} \neq 0$ أو $\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} \neq 0$

الأعداد الحقيقية $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}$ و $\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix}$ و $\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}$ تسمى المحددات المستخرجة للمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$

ملاحظة

يمكن أن نحصل على المحددات المستخرجة بالتقنية التالية

$$\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = d_3 \leftarrow \begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \\ e & e' \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} = d_2 \leftarrow \begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \\ c & c' \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} = d_1 \leftarrow \begin{pmatrix} e & e' \\ b & b' \\ c & c' \end{pmatrix}$$

3- المتجهات المستوائية

نشاط

لتكن $\vec{u}(a; b; c)$ و $\vec{v}(a'; b'; c')$ و $\vec{w}(a''; b''; c'')$ متجهات من الفضاء منسوب إلى أساس $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

1- نفترض أن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مستوائية.

$$\begin{cases} a = x \cdot a' + y \cdot a'' \\ b = x \cdot b' + y \cdot b'' \\ c = x \cdot c' + y \cdot c'' \end{cases} \text{ حيث } (x; y) \text{ من } \mathbb{R}^2$$

$$b' \begin{vmatrix} b' & b'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} a' & a'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} a' & a'' \\ b' & b'' \end{vmatrix} = 0$$

2- أكتب النتيجة العكسية لنتيجة السؤال 1. لنقبلها

هل المتجهات $\vec{u}(1; 2; 3)$ و $\vec{v}(2; 0; 1)$ و $\vec{w}(3; 1; 3)$ مستوائية.

لتكن $\vec{u}(a;b;c)$ و $\vec{v}(a';b';c')$ و $\vec{w}(a'';b'';c'')$ متجهات من الفضاء منسوب إلى أساس $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

العدد $a \begin{vmatrix} b' & b'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} a' & a'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} a' & a'' \\ b' & b'' \end{vmatrix}$ يسمى محددة المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ نرمز له $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})$

أو بـ $\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}$ نكتب $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w}) = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} b' & b'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} a' & a'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} a' & a'' \\ b' & b'' \end{vmatrix}$

ملاحظة

d_1 و d_2 و d_3 المحددات المستخرجة من $\vec{v}$ و $\vec{w}$

$$\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w}) = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = ad_1 - bd_2 + cd_3$$

ب- مبرهنة

لتكن $\vec{u}(a;b;c)$ و $\vec{v}(a';b';c')$ و $\vec{w}(a'';b'';c'')$ متجهات من الفضاء منسوب إلى أساس $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

تكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مستوائية إذا و فقط إذا $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w}) \neq 0$

تكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ غير مستوائية إذا و فقط إذا $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w}) = 0$

تمرين

في فضاء منسوب إلى معلم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ ، نعتبر النقط $A(2;2;4)$ و $B(2;1;3)$ و $C(1;-1;0)$

و $D(-1;2;1)$ و المتجهات $\vec{u}(-1;2;1)$ و $\vec{v}(1;-3;2)$ و $\vec{w}(-1;1;4)$

1- أدرس استقامية $\vec{u}$ و $\vec{v}$

2- أدرس استوائية $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$

3- أدرس استوائية النقط A و B و C و D

تمرين

في الفضاء V_3 المنسوب إلى أساس متعامد منظم $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ ، نعتبر $\vec{u}(m;2;1-m)$

و $\vec{v}(2m+1;2;-2m+3)$ حيث m بارامتر حقيقي

1- بين أن مهما كانت m من $\mathbb{R}$: $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيمتين

2- لتكن $\vec{w}(1;-2;1)$ ، بين أن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مستوائية

4- تمثيل بارامتري لمستقيم- معادلتان ديكارتيتان لمستقيم في الفضاء

أ- تمثيل بارامتري لمستقيم

في الفضاء منسوب إلى معلم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ ، نعتبر (D) المستقيم المار من النقطة $A(x_0;y_0;z_0)$

و الموجه بالمتجهة $\vec{u}(\alpha;\beta;\lambda)$

لتكن $M(x;y;z)$ من الفضاء

$M \in (D)$ تكافئ $\overrightarrow{AM} = t \cdot \vec{u}$ $\exists t \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \lambda t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{تكافئ}$$

الفضاء منسوب إلى معلم $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. لتكن $A(x_0; y_0; z_0)$ نقطة من الفضاء و $\vec{u}(\alpha; \beta; \lambda)$ متجهة غير منعدمة

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \lambda t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

النظمة تسمى تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D) المار من $A(x_0; y_0; z_0)$ و موجه بالمتجهة $\vec{u}(\alpha; \beta; \lambda)$

مثال

$$\begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = 5 + 3t \\ z = -2 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

تمثيل بارامترى للمستقيم (D) المار من $A(1; 5; -2)$ و موجه ب $\vec{u}(-2; 3; 1)$

ب- معادلتان ديكارتيتان لمستقيم في الفضاء

ليكن (D) مارا من النقطة $A(x_0; y_0; z_0)$ و $\vec{u}(a; b; c)$ متجهة موجهة له لتكن $M(x; y; z)$ من الفضاء $M \in (D)$ تكافئ $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}$ مستقيمتين

تكافئ جميع المحدد المستخرجة من $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}$ منعدمة

$$b(x - x_0) - a(y - y_0) = 0 \quad \text{و} \quad c(x - x_0) - a(z - z_0) = 0 \quad \text{و} \quad c(y - y_0) - b(z - z_0) = 0$$

الأعداد a و b و c ليست جميعها منعدمة لنفرض أن $a \neq 0$ و $b \neq 0$ و $c \neq 0$

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \quad \text{تكافئ} \quad M \in (D)$$

لنفرض أن أحدهما منعدما مثلا $a = 0$ و $b \neq 0$ و $c \neq 0$

$$x - x_0 = 0 \quad \text{و} \quad \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \quad \text{تكافئ} \quad M \in (D)$$

لنفرض أن اثنين منهما منعدمين مثلا $a = 0$ و $b = 0$ و $c \neq 0$

$$x - x_0 = 0 \quad \text{و} \quad y - y_0 = 0 \quad \text{تكافئ} \quad M \in (D)$$

مرهنة

الفضاء منسوب إلى معلم $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

إذا كان مستقيم (D) مارا من النقطة $A(x_0; y_0; z_0)$ و $\vec{u}(a; b; c)$ متجهة موجهة له فان النظمة:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

تسمى نظمة معادلتين ديكارتيتين للمستقيم (D) إذا كان $a \neq 0$ و $b \neq 0$ و $c \neq 0$ أما إذا كان أحد المعاملات منعدما فان البسط المرتبط به يكون منعدما أيضا.

أمثلة

* المستقيم (D) المار من $A(1; 5; -2)$ و موجه ب $\vec{u}(-2; 3; 1)$

$$\frac{x - 1}{-2} = \frac{y - 5}{3} = \frac{z + 2}{1}$$

معادلتان ديكارتيتان للمستقيم (D)

* المستقيم (D') المار من $B(1; -2; 2)$ و موجه ب $\vec{u}'(-3; 0; 2)$

$$y + 2 = 0 \quad \text{و} \quad \frac{x - 1}{-3} = \frac{z - 2}{2}$$

معادلتان ديكارتيتان للمستقيم (D')

* المستقيم (D'') المار من $C(3; 2; -5)$ و موجه ب $\vec{u}''(-3; 0; 0)$

$$z + 5 = 0 \quad \text{و} \quad y - 2 = 0$$

معادلتان ديكارتيتان للمستقيم (D'')

في الفضاء منسوب إلى معلم $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ ، نعتبر (P) المستوى المار من النقطة $A(x_0; y_0; z_0)$ والموجه بالمتجهتين $\vec{u}(\alpha; \beta; \lambda)$ و $\vec{u}'(\alpha'; \beta'; \lambda')$ لتكن $M(x; y; z)$ من الفضاء

$$\exists (t; t') \in \mathbb{R}^2 / \overrightarrow{AM} = t \cdot \vec{u} + t' \cdot \vec{u}' \quad M \in (P) \quad \text{تكافئ}$$

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t + \alpha' t' \\ y = y_0 + \beta t + \beta' t' \\ z = z_0 + \lambda t + \lambda' t' \end{cases} \quad (t; t') \in \mathbb{R}^2 \quad \text{تكافئ}$$

تعريف

الفضاء منسوب إلى معلم $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ ، لتكن $A(x_0; y_0; z_0)$ نقطة من الفضاء و $\vec{u}(\alpha; \beta; \lambda)$ و $\vec{u}'(\alpha'; \beta'; \lambda')$ متجهتين غير منعدمتين

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t + \alpha' t' \\ y = y_0 + \beta t + \beta' t' \\ z = z_0 + \lambda t + \lambda' t' \end{cases} \quad (t; t') \in \mathbb{R}^2 \quad \text{النظمة}$$

تسمى تمثيلا بارامتريا للمستوى (P) المار من $A(x_0; y_0; z_0)$ و موجه بالمتجهتين $\vec{u}(\alpha; \beta; \lambda)$ و $\vec{u}'(\alpha'; \beta'; \lambda')$

ب- معادلة ديكارتية للمستوى

ليكن (P) المستوى المار من $A(x_0; y_0; z_0)$ و موجه بالمتجهتين $\vec{u}(\alpha; \beta; \lambda)$ و $\vec{u}'(\alpha'; \beta'; \lambda')$

$$M(x; y; z) \in (P) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}; \vec{u}; \vec{v}) = 0$$

$$M(x; y; z) \in (P) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_0 & \alpha & \alpha' \\ y - y_0 & \beta & \beta' \\ z - z_0 & \lambda & \lambda' \end{vmatrix} = 0$$

$$M(x; y; z) \in (P) \Leftrightarrow (x - x_0) \begin{vmatrix} \beta & \beta' \\ \lambda & \lambda' \end{vmatrix} - (y - y_0) \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' \\ \lambda & \lambda' \end{vmatrix} + (z - z_0) \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' \\ \beta & \beta' \end{vmatrix} = 0$$

$$M(x; y; z) \in (P) \Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

بوضع $a = d_1$; $b = -d_2$; $c = d_3$ حيث d_1 و d_2 و d_3 المحددات المستخرجة المرتبطتين

بالمتجهتين $\vec{u}(\alpha; \beta; \lambda)$ و $\vec{u}'(\alpha'; \beta'; \lambda')$

نضع $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$

$$M \in (P) \Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0$$

مبرهنة

الفضاء منسوب إلى معلم $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ للمستوى (P) المار من $A(x_0; y_0; z_0)$ والموجه بالمتجهتين $\vec{u}(\alpha; \beta; \lambda)$ و $\vec{u}'(\alpha'; \beta'; \lambda')$ معادلة من شكل $ax + by + cz + d = 0$ حيث $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$ مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من الفضاء التي تحقق العلاقة $ax + by + cz + d = 0$ حيث $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$ ، مستوى

$ax + by + cz + d = 0$ تسمى معادلة ديكارتية للمستوى (P)

مثال

نعتبر المستوى (P) المار من $A(1; -1; 0)$ و الموجه بالمتجهتين $\vec{u}(0; 3; 2)$ و $\vec{v}(-2; -1; 0)$

نحدد معادلة ديكارتية للمستوى (P)

$$M(x, y, z) \in (P) \Leftrightarrow \det(\overline{AM}; \vec{u}; \vec{v}) = 0$$

$$M(x, y, z) \in (P) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 0 & -2 \\ y+1 & 3 & -1 \\ z & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$M(x, y, z) \in (P) \Leftrightarrow 2(x-1) + 4(y+1) + 6z = 0$$

$$M(x, y, z) \in (P) \Leftrightarrow 2x + 4y + 6z + 2 = 0$$

$$2x + 4y + 6z + 2 = 0 \text{ معادلة ديكارتية للمستوى } (P)$$

6- الأوضاع النسبية للمستقيمات و المستويات في الفضاء

أ- الأوضاع النسبية لمستقيمين في الفضاء خاصة

ليكن $(D) = D(A; \vec{u})$ و $(\Delta) = D(B; \vec{v})$ مستقيمين في الفضاء
إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيمتين و $A \in (\Delta)$ أو $B \in (D)$ فإن $(D) = (\Delta)$
إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيمتين و $A \notin (\Delta)$ فإن (D) و (Δ) متوازيان قطعاً
إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيمتين و $\det(\overline{AB}; \vec{u}; \vec{v}) = 0$ فإن (D) و (Δ) متقاطعان
إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيمتين و $\det(\overline{AB}; \vec{u}; \vec{v}) \neq 0$ فإن (D) و (Δ) غير مستوائيين

ب- الأوضاع النسبية لمستويين في الفضاء مبرهنة

$$(Q) = P(B; \vec{u}'; \vec{v}') \text{ و } (P) = P(A; \vec{u}; \vec{v})$$

- يكون (P) و (P') متوازيين إذا و فقط إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{u}'$ و $\vec{v}'$ مستوائياً
أي $\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{u}') = 0$ و $\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{v}') = 0$

- يكون (P) و (P') متقاطعان إذا و فقط إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{u}'$ و $\vec{v}'$ غير مستوائياً
أي $\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{u}') \neq 0$ أو $\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{v}') \neq 0$

خاصيات

$ax + by + cz + d = 0$: (P) حيث $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$
 $a'x + b'y + c'z + d' = 0$: (P') حيث $(a'; b'; c') \neq (0; 0; 0)$
* يكون (P) و (P') متقاطعين إذا و فقط إذا كان $ab' - a'b \neq 0$ أو $bc' - b'c \neq 0$ أو $ac' - a'c \neq 0$
* يكون (P) و (P') متوازيين قطعاً إذا و فقط إذا وجد عدد حقيقي غير منعدم t حيث
 $a' = ta$; $b' = tb$; $c' = tc$ و $d' \neq td$
* يكون (P) و (P') منطبقين إذا و فقط إذا وجد عدد حقيقي غير منعدم t حيث
 $a' = ta$; $b' = tb$; $c' = tc$ و $d' = td$

ج- الأوضاع النسبية لمستقيم و مستوى في الفضاء مبرهنة

$$(D) = D(B; \vec{u}') \text{ و } (P) = P(A; \vec{u}; \vec{v})$$

- يكون (P) و (D) متوازيان إذا و فقط إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{u}'$ مستوائياً أي $\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{u}') = 0$
- يكون (P) و (D) متقاطعان إذا و فقط إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{u}'$ غير مستوائياً أي $\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{u}') \neq 0$

ملاحظة

$(P) = P(A; \vec{u}; \vec{v})$ و $(D) = D(B; \vec{u}')$ حيث (P) و (D) متوازيان
- إذا كان $B \in (P)$ فإن $(D) \in (P)$

- إذا كان $B \notin (P)$ فإن (D) يوازي (P) قطعاً

تمرين

في فضاء منسوب إلى معلم $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ نعتبر النقط $A(2;1;2)$ و $B(1;0;2)$ و $C(1;2;2)$.
ليكن (D) المستقيم المار من A و الموجه بالمتجهة $\vec{u}(1;0;2)$ و (P) المستوى الذي معادلته الديكارتية $x + 2y - z + 3 = 0$

- 1- حدد تمثيلاً بارامترياً للمستقيم (D)
- 2- حدد معادلتين ديكارتيتين للمستقيم (D)
- 3- تأكد أن النقط A و B و C غير مستقيمية ثم حدد معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)
- 4- حدد تمثيلاً بارامترياً للمستوى (P)
- 5- حدد تقاطع (D) و (P)
- 6- نعتبر المستوى (P') المعرف بالمعادلة الديكارتية $x + y - 2z + 1 = 0$
أ- تأكد أن (P) و (P') يتقاطعان

ب- حدد تمثيل بارامترياً للمستقيم (Δ) تقاطع (P) و (P') مع إعطاء متجهة موجهة لـ (Δ)

تمرين

في فضاء منسوب إلى معلم $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ نعتبر المستويين:

$$(P_m): 2x + 4y + mz - 2 = 0$$

$$(P): 2x + 4y - z - 3 = 0$$

$$(D): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$
 و المستقيم

حيث m بارامتر حقيقي

أدرس حسب قيم m الوضع النسبي للمستويين (P) و (P_m)
أدرس حسب قيم m الوضع النسبي للمستوى (P_m) و المستقيم (D)