تمارين حو النهايات

تمارين و حلولها

تمرين

حدد النهايات التالية

$\lim_{x\to 2} 3+x-3x^2$ و $\lim_{x\to -\infty} -2x^4+3x^3+x-1$ و $\lim_{x\to +\infty} \frac{2x^5+3x^3+x}{-5x^5+2x-1}$ و $\lim_{x\to -\infty} \frac{-3x^6+2x^2+1}{x^3+3x-1}$

و $\lim_{x\to +\infty} \frac{7x^4+x^2+1}{-x^8-2x-1}$ و $\lim_{x\to 1} \frac{2x^2-5x+3}{x^2+2x-3}$ و $\lim_{x\to 1^+} \frac{-2x+1}{x^2-3x+2}$ و $\lim_{x\to 2^+} \frac{-2x+1}{x^2-x-2}$

و $\lim_{x\to 2^-} \frac{-2x+1}{x^2-x-2}$ و $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{2x-1}-1}{x-1}$ و $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+x}-x$ و $\lim_{x\to -\infty} \sqrt{x^2+x}+x$ و

$\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{x-2\sqrt{x+1}}$ و $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+1}}$ و $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\sin x}$ و $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\tan^2 x+2}$ و $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{\tan x}$

و $\lim_{x\to 0} \frac{\cos 3x-\cos x}{\sin 3x+\sin x}$ و $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \frac{\cos x}{1-\sin x}$

الجواب

نحدد النهايات

* $\lim_{x\to 2} 3+x-3x^2 = -7$ $\quad$ $\lim_{x\to -\infty} -2x^4+3x^3+x-1 = \lim_{x\to -\infty} -2x^4 = -\infty$

* $$\lim_{x\to +\infty} \frac{2x^5+3x^3+x}{-5x^5+2x-1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2x^5}{-5x^5} = -\frac{2}{5}$$

* $$\lim_{x\to -\infty} \frac{-3x^6+2x^2+1}{x^3+3x-1} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-3x^6}{x^3} = \lim_{x\to -\infty} -3x^3 = +\infty$$

* $$\lim_{x\to +\infty} \frac{7x^4+x^2+1}{-x^8-2x-1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{7x^4}{-x^8} = \lim_{x\to +\infty} \frac{-7}{x^4} = 0$$

* $$\lim_{x\to 1} \frac{2x^2-5x+3}{x^2+2x-3} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(2x-3)}{(x-1)(x+3)} = \lim_{x\to 1} \frac{2x-3}{x+3} = -\frac{1}{4}$$

* نحدد $\lim_{x\to 1^+} \frac{-2x+1}{x^2-3x+2}$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
x^2-3x+2		+	0	-	0	+	

$\lim_{x\to 1^+} x^2-3x+2 = 0^-$ $\quad$ $\lim_{x\to 1^+} -2x+1 = -1$ $\quad$ ومنه $\lim_{x\to 1^+} \frac{-2x+1}{x^2-3x+2} = +\infty$

* لدينا $\lim\limits_{x\to 2} x^2-x-2=0$ و $\lim\limits_{x\to 2} -2x+1=-3$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
x^2-x-2		+	0	-	0	+	

ومنه $\lim\limits_{x\to 2^+} x^2-x-2=0^+$ و $\lim\limits_{x\to 2^-} x^2-x-2=0^-$

إذن $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{-2x+1}{x^2-x-2}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{-2x+1}{x^2-x-2}=-\infty$

* $$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x-1}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2x-2}{(x-1)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{2}{\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}=1$$

* لدينا $$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x}$$

و حيث x تؤول إلى $+\infty$ فان x موجبة ومنه $|x|=x$

ومنه $$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\frac{1}{2}$$

* $$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x}+x=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}-x}$$

و حيث x تؤول إلى $-\infty$ فان x سالبة ومنه $|x|=-x$

إذن $$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x}+x=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1}=-\frac{1}{2}$$

* $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-2\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-2\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-2|x|\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}$$

و حيث x تؤول إلى $+\infty$ فان x موجبة ومنه $|x|=x$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-2\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\left(1-2\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1-2\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}=1$$

* $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1\right)}{\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=2$$

* لدينا $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sin x}\times\dfrac{\sin 5x}{5x}\times 5$

نعلم أن $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ ومنه $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sin x}=1$

و حيث $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x}{5x}=1$ فان $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x}{\sin x}=1\times1\times5=5$

* لدينا $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan^2 x=+\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{\tan^2 x+2}=0$

* $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\tan x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\tan x}\times\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+1}$

نعلم أن $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}=1$ ومنه $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\tan x}=1$

لدينا $\lim\limits_{x\to0}\sqrt{x+1}+1=2$ إذن $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\tan x}=1\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$

* $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{\sin 3x+\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-2\sin 2x\cdot\sin x}{2\sin 2x\cdot\cos x}=\lim\limits_{x\to0}-\tan x=0$

* لدينا $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\dfrac{\cos x}{1-\sin x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\dfrac{(1+\sin x)\cos x}{1-\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\dfrac{1+\sin x}{\cos x}=$

لدينا $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}1+\sin x=2$ و $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\cos x=0^-$ لأن $\cos x\prec0$ $\quad\forall x\in\left]-\pi;\dfrac{\pi}{2}\right[$

ومنه $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\dfrac{\cos x}{1-\sin x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\dfrac{1+\sin x}{\cos x}=-\infty$

تمرين2

بين أن $\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$

الجواب

لدينا $-1\le\sin\dfrac{1}{x}\le1$ $\quad\forall x\in\mathbb{R}^*$ ومنه $\left|x\sin\dfrac{1}{x}\right|\le|x|$ $\quad\forall x\in\mathbb{R}^*$

و حيث أن $\lim\limits_{x\to0}|x|=0$ فان $\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$

تمرين3

نعتبر g دالتين عددية للمتغير حقيقي x حيث $g(x)=\dfrac{\sqrt{2-\cos x}-1}{x^2}$

1- حدد $\lim\limits_{x\to0}g(x)$

3- بين أن $|g(x)|\le\dfrac{1}{x^2}$ $\quad\forall x\in\mathbb{R}^*$ و استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$

الجواب

-1 نحدد $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2-\cos x}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\times\frac{1}{\sqrt{2-\cos x}+1}$$

لدينا $\lim\limits_{x\to 0} 2-\cos x=1$ ومنه $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{2-\cos x}+1}=\frac{1}{2}$

وحيث $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$ فان $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

-2 نبين أن $|g(x)|\le\frac{1}{x^2}$ $\quad\forall x\in\mathbb{R}^*$

$$\forall x\in\mathbb{R}^*\quad -1\le\cos x\le 1\Leftrightarrow 1\le 2-\cos x\le 3\Leftrightarrow 0\le\sqrt{2-\cos x}-1\le\sqrt{3}-1\prec 1$$

$$\forall x\in\mathbb{R}^*\qquad |g(x)|=\left|\frac{\sqrt{2-\cos x}-1}{x^2}\right|=\frac{\sqrt{2-\cos x}-1}{x^2}$$

لدينا $0\le\sqrt{2-\cos x}-1\prec 1$ $\quad\forall x\in\mathbb{R}^*$ و منه $0\le\frac{\sqrt{2-\cos x}-1}{x^2}\prec\frac{1}{x^2}$ $\quad\forall x\in\mathbb{R}^*$

إذن $|g(x)|\le\frac{1}{x^2}$ $\quad\forall x\in\mathbb{R}^*$

نستنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

لدينا $|g(x)|\le\frac{1}{x^2}$ $\quad\forall x\in\mathbb{R}^*$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$ و منه $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$