1) نهايات مرجعية

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم لدينا :

النهاية عند $+\infty$ أو عند $-\infty$	النهاية عند الصفر
$\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$	$\lim\limits_{x\to 0} x^n = 0$
إذا كان n زوجي فإن $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = +\infty$	إذا كان n عدد زوجي فإن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x^n} = +\infty$
و إذا كان n فردي فإن $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty$	إذا كان n عدد فردي فإن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x^n} = -\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x^n} = +\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

2) النهاية عند نقطة a

- إذا كانت f دالة معرفة في a وكانت f دالة حدودية أو دالة جدرية أو دالة الجدر فإن :

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

- ليكن a عددا حقيقيا .لدينا :

$$\lim_{x\to a}\sin x = \sin a \quad \text{و} \quad \lim_{x\to a}\cos x = \cos a$$

وإذا كان $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ لكل k من $\mathbb{Z}$ ؛ فإن $\lim\limits_{x\to a}\tan x = \tan a$

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = l$

3) نهايات هامة :

ليكن a عددا حقيقيا و n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم

- ❖ $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{1}{\sqrt{x-a}} = +\infty$ ،
- ❖ إذا كان n زوجي فإن $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{(x-a)^n} = +\infty$ ،
- ❖ إذا كان n فردي فإن $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{1}{(x-a)^n} = +\infty$ ، $\lim\limits_{x\to a^-} \frac{1}{(x-a)^n} = -\infty$
- ❖ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ، $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$ ، $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin ax}{x} = a$ ، $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan ax}{x} = a$ ، $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

4) عمليات على النهايات

الأشكال المحددة	$+\infty \pm l = +\infty$	$-\infty \pm l = -\infty$	$(+\infty)+(+\infty) = +\infty$	$(-\infty)+(-\infty) = -\infty$
	$\frac{l}{\infty} = 0$	$(l\neq 0);\ \frac{l}{0} = \infty$	$\infty\times\infty = \infty$	$(l\neq 0);\ l\times\infty = \infty$

الأشكال الغير محددة	$\frac{0}{0}$	$\frac{\infty}{\infty}$	$0\times\infty$	$(+\infty)+(-\infty)$ $(+\infty)-(+\infty)$

يراعى في العمليات الحسابية جداء و خارج الإشارات

5) نهايات دوال حدودية أو جدرية عند $+\infty$ أو $-\infty$

خاصية 1 : نهاية دالة حدودية عندما يؤول x إلى $+\infty$ أو $-\infty$ هي نهاية حدها الأعلى درجة

أي إذا كانت $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ حيث $n\in\mathbb{N}^*$ و $a_n\neq 0$

فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty}P(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}a_nx^n$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}P(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}a_nx^n$

خاصية 2 : نهاية دالة جذرية عندما يؤول x إلى $+\infty$ أو $-\infty$ هي نهاية خارج حديها الأعلى درجة

أي إذا كانت $f(x)=\dfrac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{x-1}+\cdots+b_1x+b_0}$

حيث $n\in\mathbb{N}^*$ و $m\in\mathbb{N}^*$ و $a_n\neq 0$ و $b_m\neq 0$

فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a_nx^n}{b_mx^m}$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{a_nx^n}{b_mx^m}$

6) النهايات والترتيب

- إذا كان لكل x من $]a;+\infty[$: $\begin{cases}u(x)\leq f(x)\\ \lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=+\infty\end{cases}$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$
- إذا كان لكل x من $]a;+\infty[$: $\begin{cases}f(x)\leq u(x)\\ \lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=-\infty\end{cases}$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$
- إذا كان لكل x من $]a;+\infty[$: $\begin{cases}|f(x)-l|\leq u(x)\\ \lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=0\end{cases}$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$
- إذا كان لكل x من $]a;+\infty[$: $\begin{cases}u(x)\leq f(x)\leq v(x)\\ \lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}v(x)=l\end{cases}$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$

تبقى هذه الخاصيات صحيحة أيضا عندما يؤول x إلى a أو إلى a على اليمين أو على اليسار أو $-\infty$