

ملخص وقواعد في الرياضيات لمستوى الأولى باك علوم تجريبية
من انجاز : الأستاذ نجيب عثمانى أستاذ مادة الرياضيات في الثانوي تاهيلي

ملخص درس النهايات

أجوبة (1): $\lim_{x \rightarrow 3^+} 2x - 6 = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 3^+} 3x + 1 = 9 + 1 = 10$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$2x-6$	$-$	0	$+$

ومنه : $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3x+1}{2x-6} = +\infty$ وبالتالي $\lim_{x \rightarrow 3^+} 2x - 6 = 0^+$

$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3x+1}{2x-6} = -\infty$ وبالتالي $\lim_{x \rightarrow 3^-} 2x - 6 = 0^-$

(2) لدينا $\lim_{x \rightarrow 2^+} 2x + 4 = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 2^+} 5x - 20 = -10$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$-2x+4$	$+$	0	$-$

ومنه : $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{5x-20}{-2x+4} = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{5x-20}{-2x+4} = +\infty$

(5) العمليات على النهايات

في كل ما يلي a عدد حقيقي أو يساوي $+\infty$ أو $-\infty$ و l و l' عدنان حقيقيان وهذه العمليات تبقى صالحة على اليمين واليسار

(a) النهاية والجمع:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} (f+g)(x)$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد	

(b) النهاية والضرب:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	l	$l > 0$	$l < 0$	$l > 0$	$l < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	l'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0	0
$\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x)$	$l \cdot l'$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	شكل غير محدد		

(c) النهاية والمقلوب:

$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$l' \in \mathbb{R}^*$	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-
$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{g}\right)(x)$	$\frac{1}{l'}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$

(d) النهاية والخارج:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	l	l	$-\infty$	$-\infty$	0	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$\neq 0$	0	0	0	0^+	0^+	0^-	0^-	< 0	> 0	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$	$\frac{l}{l'}$	$-\infty$	$-\infty$	0	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد	

الأشكال الغير محددة هي : $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$ و $0 \times \infty$ و $(+\infty) + (-\infty)$

(6) نهاية الدالة الحدودية

نهاية دالة حدودية عندما تؤول x إلى $+\infty$ أو إلى $-\infty$ هي نهاية حدها الأكبر درجة

مثال : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 + 5x - 4 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 = +\infty$ الجواب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 + 5x - 4 = +\infty$

(7) نهاية الدالة الجذرية

نهاية دالة جذرية عندما تؤول x إلى $+\infty$ أو إلى $-\infty$ هي خارج نهاية حدها الأكبر درجة.

(1) نهايات اعتيادية: $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ • $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ •

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^n = 0$ • $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 = 0$ •

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ • $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ • $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ •

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ • $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$ • $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ •

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ •

$\lim_{x \rightarrow \infty} x^n = +\infty$ إذا كان n زوجي • $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$ إذا كان n فردي

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0^-$ • $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$ •

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ • $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ •

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ • وتقرأ النهاية عندما يؤول x إلى 0 على اليمين

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ • وتقرأ النهاية عندما يؤول x إلى 0 على اليسار

(2) خاصية : لتكن f دالة عديدة و l عددا حقيقيا

إذا كانت f تقبل نهاية l في $+\infty$ (أو في $-\infty$) فإن هذه النهاية وحيدة.

(3) النهاية على اليمين والنهاية على اليسار لدالة في نقطة

■ إذا كانت $f(x)$ يؤول إلى l عندما يؤول x إلى a على اليمين

فإننا نكتب : $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$ أو $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$

■ إذا كانت $f(x)$ يؤول إلى l عندما يؤول x إلى a على اليسار

فإننا نكتب : $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$ أو $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$

(4) نهايات اعتيادية: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = -\infty$ • $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$ • $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ • $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$ • $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} = +\infty$

إذا كان n زوجي غير منعدم , فإن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} = +\infty$

• إذا كان n فردي غير منعدم , فإن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} = -\infty$

مثال 1: أحسب النهايات التالية: (1) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3}$ (2) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-5}{x^3}$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{9}{x^5}$ (4) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-12}{x^4}$ (5) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{\sqrt{x}}$ (6) $\lim_{x \rightarrow 0^+} 3x + 7 + \frac{1}{\sqrt{x}}$

الأجوبة : (1) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty$ (2) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-5}{x^3} = -\infty$ (3) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{9}{x^5} = +\infty$

(4) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-12}{x^4} = -\infty$ (5) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{\sqrt{x}} = -\infty$ (6) $\lim_{x \rightarrow 0^+} 3x + 7 + \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 + 7 + +\infty = +\infty$

مثال 2: أحسب النهايات التالية: (1) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3x+1}{2x-6}$ و $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3x+1}{2x-6}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{5x-20}{-2x+4}$ و $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{5x-20}{-2x+4}$

11) النهايات و الترتيب

خصائص: لتكن I مجالا من نوع $[a; +\infty[$ حيث $a \in \mathbb{R}$ و $l \in \mathbb{R}$

لتكن f و U و V دوال عددية معرفة على المجال I اذا

■ اذا كانت $U(x) \leq f(x) \leq V(x) \forall x \in I$ وكانت: $\lim_{x \rightarrow +\infty} U(x) = +\infty$ فان :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

■ اذا كانت $f(x) \leq V(x) \forall x \in I$ وكانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} V(x) = -\infty$

$$\text{فان : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

■ اذا كانت $U(x) \leq f(x) \leq V(x) \forall x \in I$ وكانت:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \quad \text{فان : } \lim_{x \rightarrow +\infty} U(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} V(x) = l$$

مثال: أحسب النهاية التالية : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + \sin(x)$

الجواب: نعلم أن : $\forall x \in \mathbb{R} \quad -1 \leq \sin x \leq 1$

اذن : $2x - 1 \leq \sin x + 2x \leq 2x + 1$

ونعلم أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 1 = +\infty$ ومنه : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + \sin(x) = +\infty$

تمرين: أحسب النهاية التالية : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x$

الجواب: لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $+\infty - \infty$

نتخلص من ال ش غ م بالضرب **بالمرافق** :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x + 1} - x)(\sqrt{x^2 + x + 1} + x)}{(\sqrt{x^2 + x + 1} + x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x + 1})^2 - x^2}{(\sqrt{x^2 + x + 1} + x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1}{(\sqrt{x^2 + x + 1} + x)} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

لأن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} + x = +\infty$

دائما نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\frac{\infty}{\infty}$

نعمل ب x^2 داخل الجذر مربع وب x في البسط ونجد :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1}{(\sqrt{x^2 + x + 1} + x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\left(\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} + x\right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1\right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + 0}{\sqrt{1 + 0 + 0} + 1} = \frac{1}{2}$$

$$\text{مثال : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^6 - x^2 + 1}{x^4 + x - 4}$$

$$\text{الجواب : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^6 - x^2 + 1}{x^4 + x - 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^6}{x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 = +\infty$$

(8) نهاية الدوال اللاجذرية

خاصية: لتكن f دالة عددية معرفة على مجال على الشكل

$$[a; +\infty[\text{ بحيث } f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a; +\infty[$$

• إذا كان $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ و $l \geq 0$ فان $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{f(x)} = \sqrt{l}$

• إذا كان $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $l \geq 0$ فان $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{f(x)} = +\infty$

$$\text{أمثلة : (1) } \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x-1} - 1 \quad (2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+7} \quad (3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{3x^2 + 4}$$

$$\text{أجوبة : (1) } \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{3x^2 + 4} = \sqrt{3 \times 2^2 + 4} = \sqrt{16} = 4$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+7} = +\infty \quad \text{لدينا : } \lim_{x \rightarrow +\infty} x+7 = +\infty \quad \text{اذن : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+7} = +\infty$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x-1} - 1 = 0 \quad \text{لدينا : } \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x-1} - 1 = 0 \quad \text{و } \lim_{x \rightarrow 2} x-2 = 0$$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م بالضرب **بالمرافق** ثم بالاختزال :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1} - 1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x-1} - 1)(\sqrt{x-1} + 1)}{(x-2)(\sqrt{x-1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x-1})^2 - 1^2}{(x-2)(\sqrt{x-1} + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1-1}{(x-2)(\sqrt{x-1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x-1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{x-1} + 1} = \frac{1}{2}$$

(9) **مبرهنة:** لتكن f دالة عددية و l و a عددين حقيقيين

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \quad \text{يكافئ} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$$

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x) = \frac{|x|}{x} + x^4$

$$1. \text{ أحسب النهايات التالية : } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

2. هل الدالة f تقبل نهاية عند : $x_0 = 0$ ؟

$$\text{أجوبة : } \begin{cases} f(x) = 1 + x^4, x > 0 \\ f(x) = -1 + x^4, x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \frac{x}{x} + x^4, x > 0 \\ f(x) = \frac{-x}{x} + x^4, x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -1 + x^4 = -1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + x^4 = 1$$

(2) نلاحظ أن : $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

ومنه لدالة f لا تقبل نهاية عند : $x_0 = 0$

(10) نهاية الدوال المثلثية

$$\text{خصائص : } \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \quad \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\bullet \forall a \in \mathbb{R}^* \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{ax} = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1$$

أمثلة : أحسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin 4x} \quad (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{\tan 3x} \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{4x}$$

$$\text{أجوبة : (1) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{2x}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{1}{2} = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{\tan 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{6x} \times \frac{6x}{\tan 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{6x} \times \frac{3x}{\tan 3x} \times 2 = 1 \times 1 \times 2 = 2$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{2x} \times \frac{4x}{\sin 4x} \times \frac{2x}{4x} = 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$