

مذكرة رقم 8 في درس الدوران

الأهداف القدرات المنتظرة من الدرس :

محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
- تعريف الدوران؛ الدوران العكسي لدوران - الحفاظ على المسافة وعلى قياس زاوية موجهة وعلى المرجح. - صورة مستقيم وقطعة ودائرة بدوران.	- إنشاء صور أشكال اعتيادية بدوران معلوم؛ - التعرف على تقايس الأشكال باستعمال الدوران؛ - استعمال دوران معلوم في وضعية هندسية بسيطة.	- يعرف الدوران انطلاقا من مركزه وزاويته - يعتبر إدخال الإحداثيات والصيغة التحليلية للدوران وتركيب دورانين خارج المقرر.

I. الدوران و الدوران العكسي

لنكن Ω نقطة من المستوى الموجه و $\alpha = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$ ولتكن A و B نقطتين من المستوى الموجه

أرسم النقطة A' بحيث : $\begin{cases} \Omega A = \Omega A' \\ (\overline{\Omega A}, \overline{\Omega A'}) = \frac{\pi}{6} [2\pi] \end{cases}$ نقول A' هي صورة

A بالدوران r الذي مركزه Ω زاويته α بنفس الطريقة نرسم صورة B بالدوران r الذي مركزه Ω زاويته α

(1) تعريف الدوران

لنكن Ω نقطة من المستوى الموجه و α عددا حقيقيا الدوران الذي مركزه Ω زاويته α هو التحويل في المستوى الذي يربط كل نقطة M من المستوى بالنقطة M' المعرفة كالتالي نرسم للدوران الذي مركزه Ω زاويته α بالرمز $r(\Omega; \alpha)$ أو r إذا

لم يكن هناك التباس

$r(M) = M'$ تقرأ : M' هي صورة M بالدوران r

- إذا كان $M = \Omega$ فإن $M' = \Omega$
- إذا كان $M \neq \Omega$ فإن $\begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ (\overline{\Omega M}, \overline{\Omega M'}) = \alpha [2\pi] \end{cases}$

(2) الدوران العكسي لدوران

تعريف : لنكن Ω نقطة من المستوى الموجه و α عددا حقيقيا الدوران $r(\Omega; -\alpha)$ الذي مركزه Ω زاويته $-\alpha$ يسمى الدوران العكسي

للدوران $r(\Omega; \alpha)$ الذي مركزه Ω زاويته α

- الدوران العكسي لدوران r يرمز له بالرمز r^{-1}
- لكل نقطة M من المستوى لدينا : $r^{-1}(M') = M \Leftrightarrow r(M) = M'$

II. خاصيات :

خاصية 1 : الحفاظ على المسافة : إذا كانت A و B نقطتين من المستوى و A' و B' صورتا A و B على التوالي بدوران فان : $AB = A'B'$

نقول الدوران يحافظ على المسافة

خاصية 2 : ليكن r دورانا زاويته α إذا كانت A' و B' صورتا نقطتين مختلفتين A و B على التوالي بالدوران r فان : $(\overline{AB}, \overline{A'B'}) = \alpha [2\pi]$

ملحوظة : يمكننا هذه الخاصية من تحديد زاوية دوران انطلاقا من نقطتين مختلفتين وصورتيهما

تمرين 1 : ABC مثلث متساوي الساقين وقائم الزاوية في A بحيث :

$$(\overline{AB}, \overline{AC}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

ولیکن O منتصف القطعة $[BC]$

1. أنشئ صورة المثلث ABC بالدوران r الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$

2. أنشئ صورة المثلث ABC بالدوران r' الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$

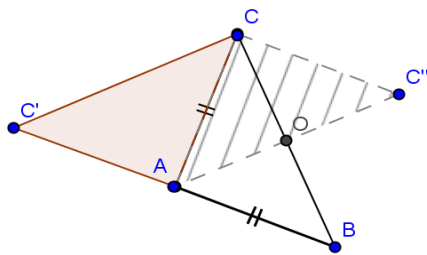
أجوبة : (1) لأن $r(A) = A$ لأن A مركز الدوران : r

$$\begin{cases} AB = AC \\ (\overline{AB}, \overline{AC}) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases} \text{ و } r(B) = C \text{ لأن : } \begin{cases} AB = AC \\ (\overline{AB}, \overline{AC}) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

و $r(B) = C$ ومنه صورة المثلث ABC بالدوران r هو المثلث ACC'

(1) $r'(A) = C$ و $r'(B) = A$ و $r'(C) = C''$

ومنه صورة المثلث ABC بالدوران r' هو المثلث ACC''



تمرين 2 : ABC مثلثا ننشئ خارجه مثلثين ABD و ACE متساويي الساقين وقائمي الزاوية في A

1. بين أن : $BE = CD$
2. بين أن : $(BE) \perp (CD)$

الجواب :

نعتبر الدوران r الذي مركزه

A وزاويته $\frac{\pi}{2}$

$$\begin{cases} AD = AB \\ (\overline{AD}, \overline{AB}) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases} \text{ لدينا : } \begin{cases} AC = AE \\ (\overline{AC}, \overline{AE}) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

ومنه : $r(D) = B$

$$\text{ولدينا : } \begin{cases} AC = AE \\ (\overline{AC}, \overline{AE}) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases} \text{ ومنه : } r(C) = E$$

من 1 و 2 وبما أن الدوران يحافظ على المسافة فان : $BE = CD$

(2) لدينا : $r(D) = B$ و $r(C) = E$ إذن :

$$(\overline{CD}, \overline{EB}) = \frac{\pi}{2} \text{ وهذا يعني أن : } (BE) \perp (CD)$$

ولدينا : $\overline{AI} = \frac{1}{4}\overline{AB}$ اذن : $\overline{BI'} = \frac{1}{4}\overline{BC}$ ❶ لأن الدوران : الحفاظ على

معامل استقامية متجهتين

ونعلم أن : $\overline{BJ} = \frac{1}{4}\overline{BC}$ ❷

من ❶ و ❷ نستنتج أن : $\overline{BI'} = \overline{BJ}$ أي $I' = J$ أي $r(I) = J$

وبالتالي : $\begin{cases} OI = OJ \\ (\overline{OI}, \overline{OJ}) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$

تمرين 5: ABC مثلث قائم الزاوية A ومتساوي الساقين فبحيث :

O منتصف القطعة $[BC]$ و $(\overline{AB}, \overline{AC}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$

وليكن D بحيث : $\overline{AD} = \frac{2}{3}\overline{AB}$ وليكن E بحيث : $\overline{CE} = \frac{2}{3}\overline{CA}$

باعتبار الدوران r الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$ بين أن المثلث ODE

قائم الزاوية ومتساوي الساقين في O

الجواب : يكفي أن نبين أن :

$r(E) = D$ ؟؟؟؟

نضع : $r(E) = E'$

ولدينا : $\begin{cases} OA = OC \\ (\overline{OC}, \overline{OA}) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$ ومنه :

❶ $r(C) = A$

ولدينا : $\begin{cases} OA = OB \\ (\overline{OA}, \overline{OB}) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$ ومنه :

❷ $r(A) = B$

ولدينا : $\overline{CE} = \frac{2}{3}\overline{CA}$ اذن من ❶ و ❷ و ❸ نجد أن

$\overline{AE'} = \frac{2}{3}\overline{AB}$ ❹ لأن الدوران : يحافظ على معامل استقامية متجهتين

ونعلم أن : $\overline{AD} = \frac{2}{3}\overline{AB}$ ❺

من ❹ و ❺ نستنتج أن : $\overline{AE'} = \overline{AD}$ أي $E' = D$ أي $r(E) = D$

وبالتالي : $\begin{cases} OE = OD \\ (\overline{OE}, \overline{OD}) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$ يعني ان : أن المثلث ODE قائم الزاوية

ومتساوي الساقين في O

III. صور بعض الأشكال بدوران :

ليكن r دورانا و A و B و O و A' و B' و O' نقتا من المستوى بحيث : $r(A) = A'$ و $r(B) = B'$ و $r(O) = O'$

خاصية :

■ صورة المستقيم (AB) بالدوران r هي المستقيم $(A'B')$

■ صورة القطعة $[AB]$ بالدوران r هي المستقيم $[A'B']$

■ صورة الدائرة $(O; R)$ التي مركزها O وشعاعها R بالدوران r

هي الدائرة $C'(O'; R)$ التي مركزها O' وشعاعها R

استنتاج

■ صورة نصف المستقيم $[AB]$ بالدوران r هي نصف المستقيم $[A'B']$

■ صورتا مستقيمين متعامدين بالدوران r هما مستقيمان متعامدان

■ صورتا مستقيمين متوازيين بالدوران r هما مستقيمان متوازيان

■ إذا كانت نقطة M تنتمي إلى تقاطع مستقيمين (D) و (Δ) فان صورة

M بالدوران r هي نقطة تقاطع صورتي

المستقيمين (D) و (Δ) بالدوران r .

خاصية 3 : الحفاظ على قياس زاوية موجهة

لتكن A و B و C و D نقط من المستوى بحيث $A \neq B$ و $C \neq D$ و A' و B' و C' و D' صورها على التوالي بدوران :

$$(\overline{AB}, \overline{CD}) \equiv (\overline{A'B'}, \overline{C'D'}) [2\pi]$$

نقول الدوران يحافظ على قياس الزوايا

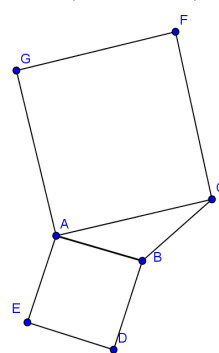
تمرين 3: ABC مثلث بحيث القياس الرئيسي للزاوية الموجهة $(\overline{AB}, \overline{AC})$

موجب .

ننشئ خارج المثلث ABC المربعين $ABDE$ و $ACFG$

نعتبر الدوران r الذي مركزه A وزاوية $\frac{\pi}{2}$

1) حدد $r(E)$ و $r(C)$ بين أن : $(\overline{CA}, \overline{CE}) \equiv (\overline{GA}, \overline{GB}) [2\pi]$



1) لدينا : $\begin{cases} AE = AB \\ (\overline{AE}, \overline{AB}) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$ ومنه :

❶ $r(E) = B$

لدينا : $\begin{cases} AC = AG \\ (\overline{AC}, \overline{AG}) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$ ومنه :

❷ $r(C) = G$

ولدينا : $r(A) = A$ ❸ لأن A مركز الدوران

r :

2) من ❶ و ❷ و ❸ وبما أن الدوران يحافظ على قياس الزوايا فان :

$$(\overline{CA}, \overline{CE}) \equiv (\overline{GA}, \overline{GB}) [2\pi]$$

خاصية 4 : الحفاظ على المرجح

ليكن G مرجح النقطتين المتزنتين $(A; \alpha)$ و $(B; \beta)$

إذا كانت A' و B' و G' صور A و B و G على التوالي بدوران r

فان : G' هي مرجح النقطتين المتزنتين $(A'; \alpha)$ و $(B'; \beta)$

ملحوظة : يمكننا تعميم هذه الخاصية على مرجح ثلاث أو أربع نقط.

استنتاج : الحفاظ على المنتصف

ليكن I منتصف القطعة $[AB]$

إذا كانت A' و B' و I' صور A و B و I على التوالي بدوران

فان : I' هي منتصف القطعة $[A'B']$

خاصية 5 : الحفاظ على معامل استقامية متجهتين

لتكن A' و B' و C' صور A و B و C على التوالي بدوران

إذا كان : $\overline{AC} = k\overline{AB}$ حيث k عدد حقيقي فان : $\overline{A'C'} = k\overline{A'B'}$

تمرين 4: $ABCD$ مربع مركزه O بحيث : $(\overline{OA}, \overline{OB}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$

و I و J نقطتان من المستوى بحيث : $\overline{AI} = \frac{1}{4}\overline{AB}$ و $\overline{BJ} = \frac{1}{4}\overline{BC}$

وليكن r الدوران الذي مركزه O وزاوية $\frac{\pi}{2}$

بين أن : $OI = OJ$ وأن : $(OI) \perp (OJ)$

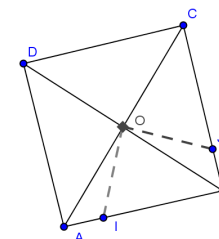
الجواب :

يكفي أن نبين أن : $r(I) = J$ ؟؟؟؟

نضع : $r(I) = I'$

لدينا : $\begin{cases} OA = OB \\ (\overline{OA}, \overline{OB}) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$ ومنه :

$r(A) = B$



تمارين للبحث

تمرين 1: $ABCD$ مربع بحيث : $(\overline{AB}, \overline{AD}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

1. حدد زاوية الدوران r الذي مركزه A و $r(D) = B$

2. حدد زاوية الدوران r' الذي مركزه C و $r'(D) = B$

تمرين 2: ABC مثلث متساوي الأضلاع بحيث :

$$(\overline{AB}, \overline{AC}) \equiv -\frac{\pi}{3} [2\pi]$$

1. حدد زاوية الدوران r_1 الذي مركزه B و يحول A إلى C

2. حدد مركز و زاوية الدوران r_2 الذي يحول A إلى B و B إلى C .

تمرين 3: $ADEF$ مربع بحيث : $(\overline{AD}, \overline{AF}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

ننشئ خارجه المثلث CED متساوي الأضلاع و داخله المثلث BEF متساوي الأضلاع

1. نعتبر الدوران r الذي مركزه E و زاوية $\frac{\pi}{3}$

بين أن : $r(D) = C$ و $r(F) = B$

2. لتكن A_1 النقطة بحيث : $r(A_1) = A$

(a) بين أن المثلث AEA_1 متساوي الأضلاع

(b) بين أن النقط : A_1 و D و F مستقيمية

(c) استنتج أن النقط : A و B و C مستقيمية

تمرين 6: $ABCD$ مربع مركزه O بحيث : $(\overline{OA}, \overline{OB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ و (D)

مستقيم يوازي المستقيم (BD) و يقطع (AD) في M و (AB) في N

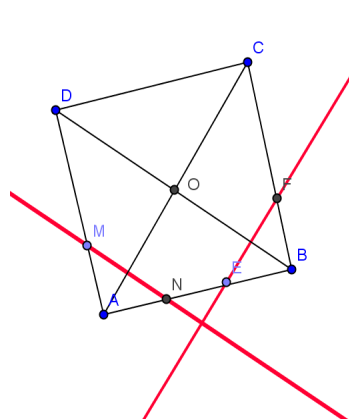
وليكن r الدوران الذي مركزه O و زاوية $\frac{\pi}{2}$

نعتبر النقطتين E و F صورتين النقطتين M و N بالدوران r على التوالي.

1. أرسم الشكل و بين أن : $(EF) \perp (MN)$

2. حدد صورة المستقيم (BD) بالدوران r

3. أ بين أن : $DN = FA$ (ب بين أن : $(EF) \parallel (AC)$)



الأجوبة : لدينا (1) و

$$\textcircled{1} r(M) = E$$

$$\textcircled{2} r(N) = F$$

من $\textcircled{1}$ و $\textcircled{2}$ نستنتج أن :

$$(\overline{MN}, \overline{EF}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$(EF) \perp (MN)$$

(2) صورة المستقيم

(BD) بالدوران r ؟؟؟

$$\text{لدينا : } \begin{cases} OB = OC \\ (\overline{OB}, \overline{OC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases} \text{ إذن :}$$

$$\textcircled{1} r(B) = C$$

$$\text{ولدينا : } \begin{cases} OD = OA \\ (\overline{OD}, \overline{OA}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases} \text{ إذن : } \textcircled{2} r(D) = A$$

من $\textcircled{1}$ و $\textcircled{2}$ نستنتج أن : $r((BD)) = (AC)$

(3) أ $DN = FA$ ؟؟؟

ولدينا : $r(D) = A$ و $r(N) = F$ و

إذن : $DN = FA$ لأن : الدوران يحافظ على المسافة

(ب) نبين أن : $(EF) \parallel (AC)$

لدينا : $(BD) \parallel (MN)$ حسب المعطيات و لدينا :

$$r((MN)) = (EF) \text{ و } r((BD)) = (AC)$$

وبما أن : الدوران يحافظ على التوازي فان : $(EF) \parallel (AC)$