

$$(b) \quad (\vec{u}, \vec{v}) \equiv (\vec{u}, \vec{w}) + (\vec{w}, \vec{v}) \quad [2\pi] \quad (\text{علاقة شال}).$$

$$(c) \quad (\vec{u}, \vec{v}) \equiv -(\vec{v}, \vec{u}) \quad [2\pi]$$

$$(d) \quad \text{إذا كانت } \vec{u} \text{ و } \vec{v} \text{ مستقيمين ولهما نفس المنحى فإن } (\vec{u}, \vec{v}) \equiv 0 [2\pi]$$

$$(e) \quad \text{إذا كانت } \vec{u} \text{ و } \vec{v} \text{ مستقيمين ولهما منحيان متعاكسان فإن } (\vec{u}, \vec{v}) \equiv \pi [2\pi]$$

$$(f) \quad \text{يكون } \alpha \text{ و } \beta \text{ قياسين لنفس الزاوية إذا وفقط إذا كان } \alpha - \beta = 2k\pi \text{ يعني } \alpha \equiv \beta [2\pi]$$

ملاحظة:

(1) تكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيمين إذا وفقط إذا كان حاملهما متوازيين.

(2) المتجهين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ (مع $\alpha \neq 0$) مستقيمان ولهما نفس المعنى.

(3) المتجهين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ (مع $\alpha < 0$) مستقيمان ولهما منحيان متعاكسان.

III - الدوال المثلثية

1) تعريف

لنكن U الدائرة المثلثية التي أصلها I .

وليكن (Δ) المحور المماس ل U في I .

ندرج المحور (Δ) بنفس وحدة معلم وأصله I .

(*) ليكن X من $\mathbb{R}$ و M النقطة التي أفصولها المنحني هو x

ليكن a أفصول ل M و b

ارتوب M يعني $M(a, b)$.

c أفصول تقاطع (OM) مع (Δ) على المحور (Δ)

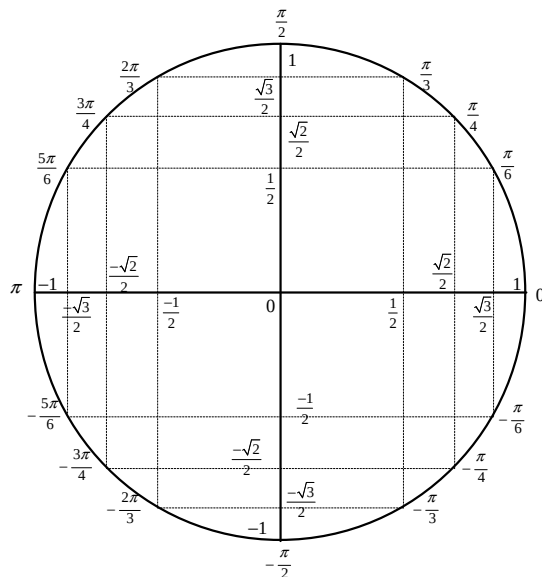
لدينا

$$\cos x = a \quad \sin x = b \quad \tan x = c$$

2) خاصيات

(a)

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\times$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0



I - التفاصيل المنحنية

(1) (*) ليكن $(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j})$ م م م. ولتكن U الدائرة التي مركزها o وشعاعها 1

(*) نختار المنحى المعاكس لعقري

الساعة كمنحى موجب. ولتكن $I(1,0)$.

(*) الدائرة U تسمى الدائرة المثلثية التي أصلها I .

(2) لنكن M نقطة من U . للحصول على أفصول

منحني لـ M .

نختار قوسا تؤدي من I نحو M ونقيس طولها.

ليكن α طول هذه القوس.

(*) إذا كان الانتقال من I نحو M يتم حسب المنحى الموجب فإن α أفصول

منحني للنقطة M .

(*) إذا كان الانتقال من I نحو M يتم حسب المنحى السالب فإن $-\alpha$ أفصول

منحني للنقطة M .

(3) للحصول على جميع الأفصول المنحنية لنقطة M يكفي أن نتعرف على أحد هذه الأفصول فقط (عادة نختار أقصر قوس تؤدي من I إلى M).

وإذا كان α أحد هذه الأفصول فإن الأفصول المنحنية للنقطة M هي الأعداد التي تكتب على شكل $\alpha + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

(4) يكون العددين α و β أفصولين منحنيين لنفس النقطة إذا وفقط إذا كان $\alpha - \beta = 2k\pi$ يعني $\alpha \equiv \beta - 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ ونكتب $\alpha \equiv \beta [2\pi]$

(ملاحظة: 1)

$$\alpha \equiv \beta [2\pi] \Leftrightarrow \alpha = \beta + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow \alpha - \beta = 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow \beta \text{ و } \alpha \text{ أفصولين منحنيين لنفس النقطة}$$

$$\alpha \equiv \alpha + 2n\pi \quad [2\pi] \quad (*) \quad (2)$$

$$\alpha \equiv \beta [2\pi] \Leftrightarrow \alpha \equiv \beta + 2n\pi \quad [2\pi] \quad (*)$$

(5) من بين جميع الأفصول المنحنية لنقطة M يوجد أفصول منحني وحيد α_0 يحقق $-\pi < \alpha_0 \leq \pi$.

يُسمى الأفصول المنحني الرئيسي للنقطة M

(ونحصل عليه باختيار أقصر قوس تؤدي من I نحو M).

(6) نعتبر الأعداد $\alpha + \frac{2k\pi}{n}$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

عدد النقط التي أفصولها المنحنية هي هذه الأعداد هو n . ومن أجل إنشائها

يكفي تعويض k ب n قيمة متتالية. عادة نعوض k بالقيم $0, 1, 2, \dots, (n-1)$

وهذه النقط تكون مضلعا منتظما محاطا بالدائرة U .

II - قياس الزوايا الموجهة

(1) لنكن $\vec{u}, \vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين.

من أجل تحديد قياسات الزاوية

الموجهة $(\vec{v}, \vec{u})$ للمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ نتبع ما يلي:

(*) نزيح المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ إلى نفس الأصل.

(*) المتجهتان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ تحددان زاويتين هندسيتين نختار إحداها

(عادة نختار الزاوية الحادة) ونحدد قياسها الهندسي بالدرجيان. ليكن α هذا

القياس.

(*) إذا التحرك من $\vec{u}$ نحو $\vec{v}$ داخل هذه الزاوية يتم حسب المنحى الموجب

فإن كل عدد على شكل $\alpha + 2k\pi$ هو قياس لهذه الزاوية ونكتب

$$(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \alpha + 2k\pi \quad \text{أو} \quad (\vec{u}, \vec{v}) \equiv \alpha [2\pi]$$

(*) إذا كان التحرك من $\vec{u}$ نحو $\vec{v}$ داخل هذه الزاوية يتم حسب المنحى

الموجب فإن كل عدد على شكل $-\alpha + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) هو قياس لهذه الزاوية.

$$\text{ونكتب } (\vec{u}, \vec{v}) = -\alpha + 2k\pi \quad \text{أو} \quad (\vec{u}, \vec{v}) \equiv -\alpha [2\pi]$$

2) خاصيات

(a) من بين قياسات $(\vec{u}, \vec{v})$ يوجد قياس وحيد يحقق $-\pi < \alpha_0 \leq \pi$ ويسمى القياس

الرئيسي.

(4) المترجمات المثلثية. (انظر التمارين)

ملاحظة

(1) نضع $f(x) = a \cos(u(x)) + b$ أو $f(x) = a \sin(u(x)) + b$

(*) إذا كان a و b غير متقابلين وغير متساويين فإن $f(x)$ تغير الإشارة في حلول المعادلة $f(x) = 0$

(*) إذا كان a و b متقابلين أو متساويين فإن $f(x)$ لها إشارة ثابتة

(2) نضع $f(x) = a \tan(u(x)) + b$ تغير الإشارة في حلول المعادلة $f(x) = 0$ وفي الأعداد التي تكون غير معرفة فيها.

(5) صيغ التحويل

$$\begin{aligned} \tan(a+b) &= \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b} & \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \tan(a-b) &= \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b} & \cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ & & \sin(a+b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ & & \sin(a-b) &= \sin a \cos b - \cos a \sin b \end{aligned} \quad (a)$$

$$\begin{aligned} \cos^2 a &= \frac{1 + \cos(2a)}{2} \\ \sin^2 a &= \frac{1 - \cos(2a)}{2} \\ \sin a \cos a &= \frac{1}{2} \sin(2a) \end{aligned} \quad (c)$$

$$\begin{aligned} \cos(2a) &= \cos^2 a - \sin^2 a \\ &= 2 \cos^2 a - 1 \\ &= 1 - 2 \sin^2 a \\ \sin(2a) &= 2 \sin a \cos a \\ \tan(2a) &= \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a} \end{aligned} \quad (b)$$

$$\begin{aligned} \cos a \cos b &= \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)] \\ \sin a \sin b &= -\frac{1}{2} [\cos(a+b) - \cos(a-b)] \\ \sin a \cos b &= \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)] \end{aligned} \quad (d)$$

$$\begin{aligned} \cos p + \cos q &= 2 \cos \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2} \\ \cos p - \cos q &= -2 \sin \frac{p+q}{2} \cdot \sin \frac{p-q}{2} \\ \sin p + \sin q &= 2 \sin \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2} \\ \sin p - \sin q &= 2 \cos \frac{p+q}{2} \cdot \sin \frac{p-q}{2} \end{aligned} \quad (e)$$

(f) نضع $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ لدينا .

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

(g) من أجل تحويل $f(x) = a \cos x + b \sin x$ نتبع ما يلي:

$$\begin{aligned} f(x) &= a \cos x + b \sin x \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right) \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \alpha \cos x + \sin \alpha \sin x) \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} (\cos x \cos \alpha + \sin x \sin \alpha) \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \alpha) \end{aligned}$$

$$\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{و} \quad \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{مع}$$

(b) تكون $\tan(x)$ معرفة إذا وفقط إذا كان $\begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$ يعني $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad (c)$$

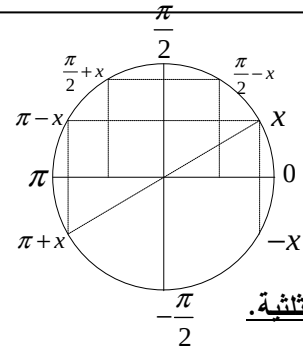
$$\tan(x + k\pi) = \tan x \quad \sin(x + 2k\pi) = \sin x \quad \cos(x + 2k\pi) = \cos x \quad (d)$$

$$\tan(-x) = -\tan x \quad \sin(-x) = -\sin x \quad \cos(-x) = \cos x \quad (e)$$

$$\begin{aligned} \cos(\pi + x) &= -\cos x & \cos(\pi - x) &= -\cos x \\ \sin(\pi + x) &= -\sin x & \sin(\pi - x) &= \sin x \\ \tan(\pi + x) &= \tan x & \tan(\pi - x) &= -\tan x \end{aligned} \quad (f)$$

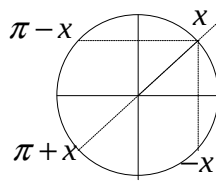
$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= -\sin x & \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \sin x \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= \cos x & \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cos x \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= -\frac{1}{\tan x} & \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \frac{1}{\tan x} \end{aligned} \quad (g)$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) : -1 \leq \cos x \leq 1 ; \quad -1 \leq \sin x \leq 1 \quad (h)$$



(3) المعادلات المثلثية.

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi \\ \cos x &= -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi & \cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = -\alpha + 2k\pi \end{cases} \\ \cos x &= 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{aligned} \quad (a)$$



$$\begin{aligned} \sin x &= 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \sin x &= -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \sin x &= 0 \Leftrightarrow x = k\pi \\ \sin x &= \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{cases} \end{aligned} \quad (b)$$

$$\tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \quad (c)$$

ملاحظات.

(1) إذا كان $\alpha \notin [-1, 1]$ فإن المعادلتين $\cos x = a$ و $\sin x = a$ ليس لهما حل.

(2) تكون المعادلة $\tan(u(x)) = a$ معرفة إذا وفقط إذا كان $\begin{cases} u(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$

$$\begin{aligned} -\tan \alpha &= \tan(-\alpha) & -\sin \alpha &= \sin(-\alpha) & -\cos \alpha &= \cos(\pi - \alpha) \\ \cos \alpha &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) & \sin \alpha &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \end{aligned} \quad (3)$$