

الأولى سلك باكالوريا

مسالك العلوم التجريبية وعلوم
التكنولوجيا الميكانيكية والكهربائية



الحساب المثلثي calculs trigonométriques

القدرات المنتظرة

التمكن من مختلف صيغ التحويل . التمكن من حل معادلات
ومتراجحات مثلثية تؤول في حلها إلى معادلات أساسية . التمكن من تمثيل وقراءة حلول
معادلة او متراجحة مثلثية على الدائرة المثلثية

أ - صيغة الجـ مع

أ - المستوى منسوب إلى معلم متعامد منظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ولتكن $(O, r=1)$ الدائرة المثلثية

ولتكن $M(x)$ و $M'(y)$ نقطتين من ζ فان $\vec{OM}' = \cos(y)\vec{i} + \sin(y)\vec{j}$ و

$$\vec{OM} = \cos(x)\vec{i} + \sin(x)\vec{j}$$

$$\vec{OM} \cdot \vec{OM}' = \|\vec{OM}\| \cdot \|\vec{OM}'\| \cos(\vec{OM}; \vec{OM}') \quad \text{و} \quad \vec{OM} \cdot \vec{OM}' = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y) \quad (1) \quad \text{ادن}$$

$$= 1 \times 1 \cdot \cos(y-x) \quad (2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن $\cos(y-x) = \cos(y)\cos(x) + \sin(y)\sin(x)$

$$\cos(y+x) = \cos(y-(-x))$$

$$= \cos(y)\cos(-x) + \sin(y)\sin(-x) \quad \text{ب- لدينا}$$

ونعلم أن $\cos$ دالة زوجية و $\sin$ دالة فردية ادن:

$$\cos(y+x) = \cos(y)\cos(x) - \sin(y)\sin(x)$$



Brahim Ajghaider

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (x+y)\right) \\ &= \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - y\right] \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos(y) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\sin(y)\end{aligned}$$

ج -

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \\ \sin(x-y) &= \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)\end{aligned}$$

$$tg(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}$$

د - لدينا

$$tg(a+b) = \frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{\cos a \cos b - \sin a \sin b}$$

باستعمال الصيغ السابقة نجد

$$tg(a+b) = \frac{tga + tgb}{1 - tga.tgb}$$

ادن

$$tg(a+b) = \frac{\frac{\sin a \cos b}{\cos a \cos b} + \frac{\cos a \sin b}{\cos a \cos b}}{\frac{\cos a \cos b}{\cos a \cos b} + \frac{\sin a \sin b}{\cos a \cos b}}$$

ومنه

$$\begin{aligned}tg(a-b) &= tg[a + (-b)] \\ &= \frac{tga - tgb}{1 + tga.tgb}\end{aligned}$$

تمرين 1 احسب النسب المثلثية $\frac{\pi}{12}$ و $\frac{5\pi}{12}$ و $\frac{7\pi}{12}$

2. احسب $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ و $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$$\begin{aligned}tg(2a) &= \frac{2tg(a)}{1 - tg^2(a)} \quad \text{و} \quad \sin(2a) = 2\sin a \cos a \quad \text{و} \quad \cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) \\ &= 2\cos^2(a) - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2(a)\end{aligned}$$

استنتاجات



Brahim Ajghaider

تمرين 2 : علما أن $tg(a) = \frac{-1}{2}$ فاحسب $tg(2a)$ و $\cos(2a)$ ثم $\sin(2a)$

تمرين 3 : احسب $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ و $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

تمرين 4 : بين انه لكل a من $\mathbb{R}$ فان $\sin(2a) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + 2a\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - 2a\right)$ و

$$\cos(2a) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + 2a\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2a\right)$$

II - تحويل الجداء إلى جمع

لدينا $\cos(y+x) = \cos(y)\cos(x) - \sin(y)\sin(x)$

و $\cos(x-y) = \cos(y)\cos(x) + \sin(y)\sin(x)$

بجمع طرف بطرف نجد $\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$

بطرح طرف بطرف نجد $\sin(x)\sin(y) = -\frac{1}{2}[\cos(x+y) - \cos(x-y)]$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

$$\cos(x)\sin(y) = \frac{1}{2}[\sin(x+y) - \sin(x-y)]$$

تحويل الجداء مع إلى جـ داء

في العلاقات السابقة نضع $\begin{cases} x+y=a \\ x-y=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{a+b}{2} \\ y=\frac{a-b}{2} \end{cases}$



Brahim Ajghaider

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \left(\frac{a+b}{2} \right) \cos \left(\frac{a-b}{2} \right)$$

$$\cos a - \cos b = -2 \cos \left(\frac{a+b}{2} \right) \sin \left(\frac{a-b}{2} \right)$$

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \left(\frac{a+b}{2} \right) \cos \left(\frac{a-b}{2} \right)$$

$$\sin a - \sin b = 2 \sin \left(\frac{a-b}{2} \right) \cos \left(\frac{a+b}{2} \right)$$

III- **تجـويل** $tg(a+b)$ و $tg(a-b)$

ليكن a و b عددين حقيقيين بحيث $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ و $b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ لكل $k \in \mathbb{Z}$

$$tg(a+b) = \frac{tga + tgb}{1 - tga \cdot tgb}$$

- إذا كان $a+b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ فإن

$$tg(a-b) = \frac{tga - tgb}{1 + tga \cdot tgb}$$

إذا كان $a-b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ فإن

IV- **تجـويل** $a \cos x + b \sin x$ **وإل الصيغة**

ليكن a و b عددين حقيقيين غير منعدمين

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right)$$

$$\left| \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \leq 1 \quad \text{و} \quad \left| \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \leq 1 \quad \text{إذن} \quad b^2 \leq b^2 + a^2 \quad \text{وكذلك} \quad a^2 \leq a^2 + b^2 \quad \text{ولدينا}$$

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = \left(\frac{a^2}{a^2 + b^2} \right) + \left(\frac{b^2}{a^2 + b^2} \right) = 1 \quad \text{وبما أن}$$

$$\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{و} \quad \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{أي} \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \text{ونعلم أن}$$

$$\cos \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{و} \quad \sin \beta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



Brahim Ajghaider

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} (\cos x \cos \alpha + \sin x \sin \alpha) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \alpha)$$

وبالتالي

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} (\cos x \sin \beta + \sin x \cos \beta) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \beta) \quad \text{و}$$

تمرين 5 عبر بدالات $\cos x$ و $\sin x$ عما يلي

1. $\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ 2. $2 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

$$A = \cos(2x) + \cos(6x)$$

$$B = \cos(7x) - \cos(3x)$$

$$C = \sin(3x) + \sin(5x)$$

$$D = \sin(8x) - \sin(6x)$$

حول إلى جداء كل من التعابير التالية

تمرين 6

$$\cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 0$$

$$\sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 0$$

ليكن $x \in \mathbb{R}$ بين أن

تمرين 7

تمرين 8 1. تحقق من أن $\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{10}\right)$

2. 1- بين أن $(\forall x \in \mathbb{R}) / \cos(3x) = \cos x (1 - 4\sin^2 x)$

ب- استنتج قيمة كل من $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$; $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$

3. بين أن $\sin\left(\frac{7\pi}{30}\right) = \frac{1}{8}(\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{5} + 1)$ (لاحظ أن $\frac{7\pi}{30} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{10}$)

تمرين 9 حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية

1. $\sin 7x = 0$ 2. $\cos 3x = 0$ 3. $\sin\left(2x + \frac{\pi}{8}\right) = 0$

3. $\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 4. $\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 5. $\sin\left(2x + \frac{\pi}{7}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$$

$$\cos^2 x - 3 \cos x + 2 = 0$$

$$\sqrt{3} \tan^2 x + (\sqrt{3} - 1) \tan x - 1 = 0$$

تمرين 10 1. حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية

2. 2. ح، ف، $\mathbb{R}$ المعادلات التالية $\cos x - \sqrt{3} \sin x = 1$



Brahim Ajghaider