

الحساب المثلثي

القدرات المتطرة:

. التمكن من مختلف صيغ التحويل؛

. التمكن من حل معادلات ومتراحجات مثلثية تؤول في حلها إلى المعادلات والمتراحجات الأساسية؛

. التمكن من تمثيل وقراءة حلول معادلة أو متراحجة مثلثية على الدائرة المثلثية.

1- أنشطة

a / أنشطة تذكيرية

نشاط 1

بسط التعابير التالية

$$A = \sin(11\pi - x) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin\left(\frac{21\pi}{2} - x\right) \cdot \cos(5\pi - x)$$

$$B = \tan \frac{\pi}{5} + \tan \frac{2\pi}{5} + \tan \frac{3\pi}{5} + \tan \frac{4\pi}{5}$$

نشاط 2

1/ حل في $\mathbb{R}$ المعادلات

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad \text{أ-} \quad \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ب-} \quad \tan x = -1 \quad \text{ج-}$$

2/ حل المتراحجات

$$\cos x \geq \frac{1}{2} \quad \text{أ-} \quad x \in]-\pi; \pi] \quad \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \leq \frac{1}{2} \quad \text{ب-} \quad x \in [-\pi; \pi]$$

$$\tan x < 1 \quad \text{ج-} \quad x \in [0; 2\pi]$$

b / أنشطة التقديم

أنشطة

نعتبر $(O; \vec{i}; \vec{j})$ معلم متعامد ممنظم مباشر مرتبط بالدائرة المثلثية (C) . ليكن x و y

عددين حقيقيين. و M و M' نقطتين من (C) أفصوليهما المنحنيين x و y على التوالي

$$1- \text{بين أن } \overline{OM} \cdot \overline{OM'} = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$$

$$2- \text{أ/ بين أن } [\overline{OM'}, \overline{OM}] = x - y \quad [2\pi] \quad \text{ثم استنتج أن } \overline{OM} \cdot \overline{OM'} = \cos(x - y)$$

$$\text{ب/ استنتج أن } \cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$$

$$3 \text{ استنتج أن } \cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y$$

$$4 \text{ بين أن } \tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y} \quad \text{حيث } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ و } y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ و } x + y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\text{و } k \in \mathbb{Z} \text{ و } \tan x \cdot \tan y \neq 1$$

$$\text{استنتج أن } \tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y} \quad \text{حيث } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ و } y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ و } x - y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\text{و } k \in \mathbb{Z} \text{ و } \tan x \cdot \tan y \neq -1$$

$$5 \text{ استنتج أن } \sin 2x = 2 \sin x \cos x \quad \text{و } \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \quad \text{حيث } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ و } x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \text{ و } k \in \mathbb{Z}$$

2 / صيغ التحويل

a / خاصيات

$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y$$

$$x+y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ و } y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ و } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ حيث } \tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y}$$

$$\tan x \cdot \tan y \neq 1 \text{ و } k \in \mathbb{Z} \text{ و}$$

$$x-y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ و } y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ و } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ حيث } \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y}$$

$$\tan x \cdot \tan y \neq -1 \text{ و } k \in \mathbb{Z} \text{ و}$$

b / نتائج

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$k \in \mathbb{Z} \text{ و } x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \text{ و } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ حيث } \tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

تمرين

أحسب النسب المثلثية للعدد $\frac{\pi}{8}$

تمرين

بين أن $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$ و $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$
c/ تحويل مجموع إلى جداء - تحويل جاء إلى مجموع

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2 \cos x \cos y$$

$$\cos(x+y) - \cos(x-y) = -2 \sin x \sin y$$

$$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2 \sin x \cos y$$

$$\sin(x+y) - \sin(x-y) = 2 \cos x \sin y$$

$$\text{بوضع } x+y=p \text{ و } x-y=q \text{ أي أن } x = \frac{p+q}{2} \text{ و } y = \frac{x-y}{q}$$

نحصل على النتائج

تحويل مجموع إلى جداء

$$\cos(p) + \cos(q) = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

تحويل جداء إلى مجموع

مما سبق نستنتج أن

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin x \sin y = -\frac{1}{2} [\cos(x+y) - \cos(x-y)]$$

$$\cos x \sin y = \frac{1}{2} [\sin(x+y) - \sin(x-y)]$$

تمرين

أكتب $\cos 3x + \cos 7x$ على شكل جداء

تمرين

في مثلث مثلث ABC

$$\sin \hat{A} + \sin \hat{B} + \sin \hat{C} = 4 \cos \frac{\hat{A}}{2} \times \cos \frac{\hat{B}}{2} \times \cos \frac{\hat{C}}{2} \quad \text{بين أن}$$

تمرين

$$\sin^2 \frac{5x}{2} - \cos^2 \frac{3x}{2} = -\sin 4x \cdot \sin x \quad \text{بين أن}$$

تمرين

أكتب على شكل مجموع الجداء: $\sin 2x \cdot \sin 3x \cdot \sin 5x$

3- تحويل $a \cos x + b \sin x$

ليكن التعبير $a \cos x + b \sin x$ حيث $a \neq 0$ أو $b \neq 0$

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right)$$

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1 \quad \text{نلاحظ أن}$$

ومنه يوجد α من $]-\pi; \pi]$

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases} \quad \text{حيث}$$

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \alpha \cos x + \sin \alpha \sin x)$$

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \alpha)$$

ليكن a و b من $\mathbb{R}$ حيث $a \neq 0$ أو $b \neq 0$

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \alpha)$$

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{حيث}$$

ملاحظة:

يمكننا تحويل $a \cos x + b \sin x = c$ لحل المعادلات من شكل

أو المتراجحات $a \cos x + b \sin x \geq c$ أو $a \cos x + b \sin x \leq c$

تمرين

$$x \in \mathbb{R} \quad \cos x + \sqrt{3} \sin x = -1 \quad \text{حل المعادلة 1/}$$

2/ حل المتراجحة التالية

$$x \in [-\pi; 2\pi] \quad \cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x > -\sqrt{2}$$

تحديد النسب المثلثية للعدد x بدلالة $t = \tan \frac{x}{2}$

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \quad \text{لدينا}$$

$$\cos x = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}}$$

نقسم البسط و المقام بالعدد $\cos^2 \frac{x}{2}$ مع اعتبار شروط الوجود

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{أي} \quad \cos x = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} \quad \text{ومنه}$$

باستعمال العلاقات $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}$ و نفس الطريقة نحصل على $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$

$\tan \frac{x}{2} = t$ بوضع
$\tan x = \frac{2t}{1-t^2} \quad \text{و} \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{و} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$