

الجداء السلمي - الدائرة

5) المستقيم في المستوى

(a) ليكن (D) مستقيم و $\vec{n}$ متجهة. نقول إن المتجهة $\vec{n}$ منظمية على (D) إذا كان حامل $\vec{n}$ عمودي على (D) (يعني $\vec{n} \perp (D)$).

(b) نعتبر المستقيم: (D): $ax+by+c=0$

لدينا $\vec{u}(-b,a)$ موجهة ل (D) و $\vec{n}(a,b)$ منظمية على (D).

(c) معادلة مستقيم معرف بنقطة ومتجهة منظمية عليه.

مثال: حدد المعادلة ديكرتية للمستقيم (D) المار من A(1,2) والمتجهة $\vec{n}(-3,4)$ منظمية عليه.

طريقة 1.

$$\begin{aligned} M(x,y) \in (D) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow -3(x-1) + 4(y-2) = 0 \end{aligned}$$

إن (D): $-3x+4y-5=0$

طريقة 2. لدينا $\vec{n}(-3,4)$ منظمية على (D) إذن معادلة (D) على شكل

شكل (D): $-3x+4y-5=0$ ولدينا A(1,2) إذن $-3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + c = 0$ يعني $c = -5$ إذن (D): $-3x+4y-5=0$

(d) ليكن (D) مستقيم مار من A و $\vec{n}$ منظمية عليه.

و (D') مستقيم مار من A' و $\vec{n'}$ منظمية عليه.

(*) يكون $(D) \perp (D')$ إذا وفقط إذا كان $\vec{n} \perp \vec{n'}$ يعني $\vec{n} \cdot \vec{n'} = 0$

(*) يكون $(D) \parallel (D')$ إذا وفقط إذا كان $\vec{n} \parallel \vec{n'}$ يعني $\det(\vec{n}, \vec{n'}) = 0$

(e) نعتبر المستقيمين: (D): $ax+by+c=0$ (D'): $a'x+b'y+c'=0$

(*) يكون $(D) \perp (D')$ إذا وفقط إذا كان $aa' + bb' = 0$

(*) يكون $(D) \parallel (D')$ إذا وفقط إذا كان $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0$

(f) مسافة نقطة عن مستقيم.

(i) ليكن (D) مستقيم و A نقطة من المستوى.

نسمي مسافة A عن (D) العدد الذي نرمز له ب $d(A, (D))$ والمعرف

بما يلي $d(A, (D)) = AH$ حيث H هي المسقط العمودي ل A على (D).

(ii) نعتبر المستقيم (D): $ax+by+c=0$ والنقطة $A(x_0, y_0)$

$$d(A, (D)) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

ملاحظة: مسافة النقطة A عن المستقيم (D) هي أصغر مسافة

بين A ونقط المستقيم (D).

(g) واسط القطعة [AB] هو المستقيم المار من I منتصف [AB] و $\overrightarrow{AB}$ منظمية عليه.

(h) (*) مركز ثقل المثلث (ABC) هو تقاطع المتوسطات.

(*) مركز تعامد المثلث (ABC) هو تقاطع الارتفاعات.

(*) مركز الدائرة المحيطة بالمثلث (ABC) هو تقاطع الواسطات.

(*) مركز الدائرة المحاطة بالمثلث (ABC) هو تقاطع المنصفات.

نفترض في كل ما يلي أن المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

(I) تحليلية الجداء السلمي

1) نعتبر المتجهتين $\vec{u}(x;y)$ و $\vec{v}(x';y')$

لدينا $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$ و $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

2) نعتبر النقطتين $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$

لدينا $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$ و $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

3) $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

4)

(a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$

(b) $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$ و $\sin(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\det(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$

(c) $\cos(\widehat{BAC}) = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \cdot AC}$

(d) $\sin(\widehat{BAC}) = \left| \sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \right| = \left| \frac{\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}{AB \cdot AC} \right|$

ملاحظة:

(a) إذا أردنا تحديد قياسا للزاوية الهندسية $\widehat{BAC}$ يكفي حساب $\cos(\widehat{BAC})$

نجد مثلا: $\cos(\widehat{BAC}) = -\frac{1}{2}$

يعني $\cos(\widehat{BAC}) = \cos \frac{2\pi}{3}$

إذن $\widehat{BAC} = \frac{2\pi}{3}$

(b) إذا أردنا تحديد قياس الزاوية الموجهة $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ نقوم بحساب

$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ و $\sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

نجد مثلا: $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ و $\sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

ومن أجل تحديد قياس الزاوية نتبع ما يلي:

$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \cos \frac{3\pi}{4}$ يعني $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

يعني $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ أو $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{-3\pi}{4} + 2k\pi$

ولدينا $\sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) < 0$

إذن $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{-3\pi}{4} + 2k\pi$

يعني $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{-3\pi}{4} + 2k\pi$

(II) دراسة تحليلية للدائرة.

1) الدائرة التي مركزها Ω وشعاعها r هي مجموعة M التي تحقق $\Omega M = r$.

2) معادلة الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(a,b)$ وشعاعها r هي $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ نقوم بالنشر ونحصل على معادلة على شكل $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$.

3) نعتبر المجموعة (Γ) التي معادلتها $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ (Γ): من أجل دراسة طبيعة المجموعة (Γ) هناك طريقتان:

ط1: نضع $a = -\frac{\alpha}{2}$ $b = -\frac{\beta}{2}$ $c = \gamma$ ونقوم بحساب $a^2 + b^2 - c$

(*) إذا كان $a^2 + b^2 - c < 0$ فإن $\Gamma = \emptyset$

(*) إذا كان $a^2 + b^2 - c = 0$ فإن $\Gamma = \{\Omega(a,b)\}$

(*) إذا كان $a^2 + b^2 - c > 0$ فإن (Γ) دائرة مركزها $\Omega(a,b)$ وشعاعها $r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

ط2: نقوم بتحويل المعادلة لنرجعها على شكل $(x-a)^2 + (y-b)^2 = k$

باستعمال بداية متطابقة هامة $X^2 + \alpha X = \left(X + \frac{\alpha}{2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2$.

(*) إذا كان $k < 0$ فإن $(\Gamma) = \emptyset$.

(*) إذا كان $k = 0$ فإن $\Gamma = \{\Omega(a,b)\}$.

(*) إذا كان $k > 0$ فإن (Γ) دائرة مركزها $\Omega(a,b)$ وشعاعها $r = \sqrt{k}$.

4) معادلة دائرة معرفة بأحد أقطارها.

لتكن (ℓ) دائرة أحد أقطارها $[AB]$ للحصول على معادلة (ℓ) هناك طريقتان:

ط1: نستعمل الصيغة: $(x-x_A)(x-x_B) + (y-y_A)(y-y_B) = 0$

$M(x,y) \in (\ell) \Leftrightarrow \overline{AM} \cdot \overline{BM} = 0$

ط2: نتبع ما يلي: $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-x_A \\ y-y_A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-x_B \\ y-y_B \end{pmatrix} = 0$

ملاحظة: إذا كان (ABC) قائم الزاوية في A فإن الدائرة المحيطة بالمثلث (ABC) هي الدائرة التي قطرها $[BC]$. مركزها هو منتصف $[BC]$ شعاعها هو $\frac{BC}{2}$.

5) تمثيل باراميتري للدائرة.

تمثيل باراميتري للدائرة (ℓ) التي مركزها $\Omega(a,b)$ وشعاعها r هو

$(C): \begin{cases} x = a + r \cos \theta \\ y = b + r \sin \theta \end{cases} (\theta \in \mathbb{R})$

6) داخل خارج دائرة:

لتكن (C) دائرة مركزها $\Omega(a,b)$ وشعاعها r معادلتها

$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + c = 0$ ونعتبر النقطة $M(\alpha, \beta)$.

(*) تكون M خارج الدائرة (ℓ) إذا وفقط إذا كان:

$\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\alpha + \beta\beta + c > 0$ أو $\Omega M > 0$

(*) تكون M داخل الدائرة (ℓ) إذا وفقط إذا كان:

$\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\alpha + \beta\beta + c < 0$ أو $\Omega M < 0$

(*) $M \in (C)$ إذا وفقط إذا كان $\Omega M = r$ أو

$\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\alpha + \beta\beta + c = 0$

7) تقاطع مستقيم ودائرة.

لتكن (C) دائرة مركزها Ω وشعاعها r ومعادلتها

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

ونعتبر المستقيم $(\Delta): \alpha x + \beta y + \gamma = 0$.

من أجل دراسة تقاطع (C) و (Δ) نقوم بحساب $d(\Omega, (\Delta))$.

(a) إذا كانت $d(\Omega, (\Delta)) > r$ فإن (Δ) يوجد خارج (C) وبالتالي لا يقطع (C) .

(b) إذا كانت $d(\Omega, (\Delta)) = r$ فإن (Δ) يقطع (C) في نقطة واحدة A . ونقول في هذه الحالة إن (Δ) مماس ل (C) في النقطة A و A تسمى نقطة التماس.

وللحصول على نقطة التماس نقوم بحل

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by = 0 \\ \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \end{cases} \text{ النظام}$$

(c) إذا كانت $d(\Omega, (\Delta)) < r$ فإن (Δ) يقطع (C) في نقطتين A

و B ، وللحصول على إحداثيات النقطتين A و B نقوم بحل

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by = 0 \\ \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \end{cases} \text{ النظام}$$

8) معادلة مماس لدائرة.

لتكن (C) دائرة مركزها Ω وشعاعها r

ومعادلتها $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ وليكن (T) المماس ل (C) في

النقطة $A(x_0, y_0)$.

للحصول على معادلة (T) هناك طريقتان:

ط1: نستعمل الصيغة $(T): x_0 x + y_0 y + \frac{a}{2}(x_0 + x) + \frac{b}{2}(y_0 + y) + c = 0$

ط2: (T) هو المستقيم المار من Ω والمتجه $\overrightarrow{\Omega A}$ منظمية عليه.

ملاحظة: يكون (T) مماسا ل (C) في A إذا وفقط إذا كان (T)

عموديا على (ΩA) في A .