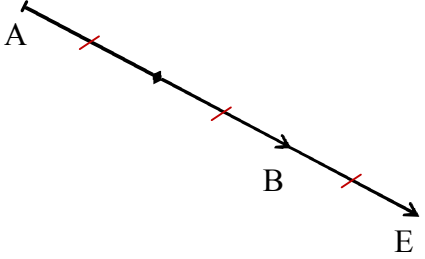
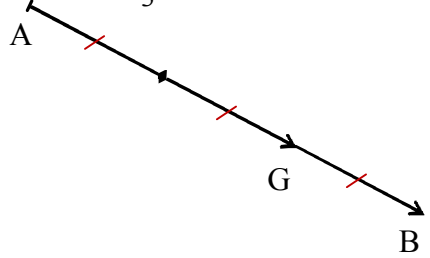
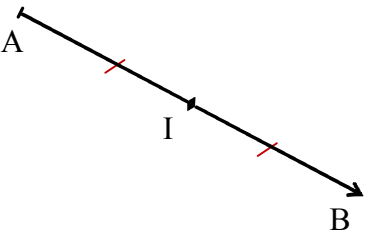
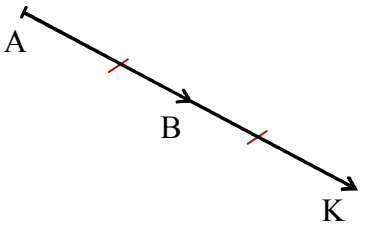
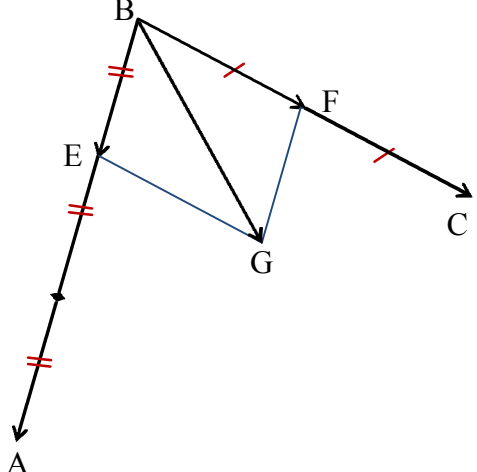


المرجح

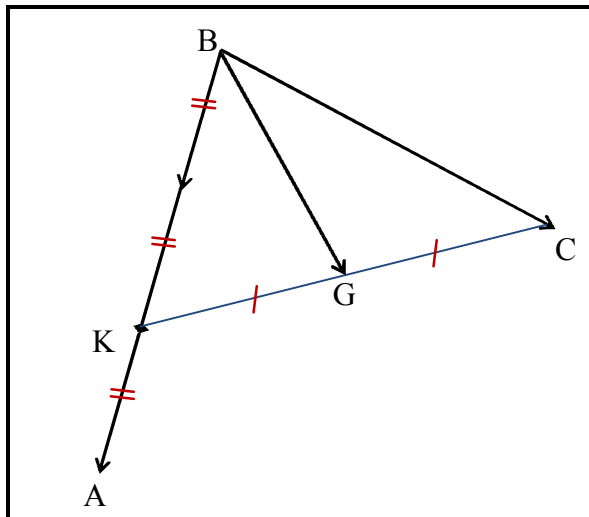
تمرين 1

مرجح E النقطتين المترتبتين $(A, -1)$ و $(B, 3)$ لدينا حسب الخاصية المميزة للمرجح: $\forall M \in (P) \overrightarrow{ME} = \frac{-1}{2} \overrightarrow{MA} + \frac{3}{2} \overrightarrow{MB}$ نأخذ: $M = A$ فنجد أن: $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2} \overrightarrow{AB}$ 	مرجح G النقطتين المترتبتين $(A, 2)$ و $(B, 1)$ لدينا حسب الخاصية المميزة للمرجح: $\forall M \in (P) \overrightarrow{MG} = \frac{1}{3} \overrightarrow{MA} + \frac{2}{3} \overrightarrow{MB}$ نأخذ: $M = A$ فنجد أن: $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB}$  ❖ : إذا أخذنا $M = B$ سنجد أن $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BA}$ ، لكننا سنجد G في نفس الموضع
مرجح I النقطتين المترتبتين $(A, 100)$ و $(B, 100)$ بما أن المعاملان متساويان إذن I منتصف القطعة $[AB]$  ❖ : مرجح نقطتين لهما نفس المعامل هو منتصف القطعة التي تصلهما	مرجح K النقطتين المترتبتين $(A, -1)$ و $(B, 2)$ لدينا حسب الخاصية المميزة للمرجح: $\forall M \in (P) \overrightarrow{MK} = \frac{-1}{1} \overrightarrow{MA} + \frac{2}{1} \overrightarrow{MB}$ نأخذ: $M = A$ فنجد أن: $\overrightarrow{AK} = 2 \overrightarrow{AB}$  ❖ : لإيجاد علاقة متجهة تسمح بالإنشاء يمكن أيضا استعمال تعريف المرجح، لكن هذه الطريقة تتطلب في الغالب استعمال علاقة شال للحصول على المتساويات السابقة.

تمرين 2

	لدينا G مرجح النقط المترتبة $(A, 2)$ و $(B, 1)$ و $(C, 3)$ إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح: $\forall M \in (P) \overrightarrow{MG} = \frac{2}{6} \overrightarrow{GA} + \frac{1}{6} \overrightarrow{GB} + \frac{3}{6} \overrightarrow{GC}$ نأخذ: $M = B$ فنجد: $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}$ ❖ : لأجل الإنشاء أنشأنا أولا النقطة E حيث $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BA}$ ثم النقطة F حيث $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}$ ثم أنشأنا G حيث : $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{BF}$ أي $BEGF$ متوازي الأضلاع
---	--

تمرين 2



لتكن K مرشح النقط المتزنة $(A, 2)$ و $(B, 1)$

بما أن G مرشح $(A, 2)$ و $(B, 1)$ و $(C, 3)$
إذن حسب خاصية التجميعية فإن G مرشح $(K, 3)$ و $(C, 3)$
أي منتصف $[CK]$

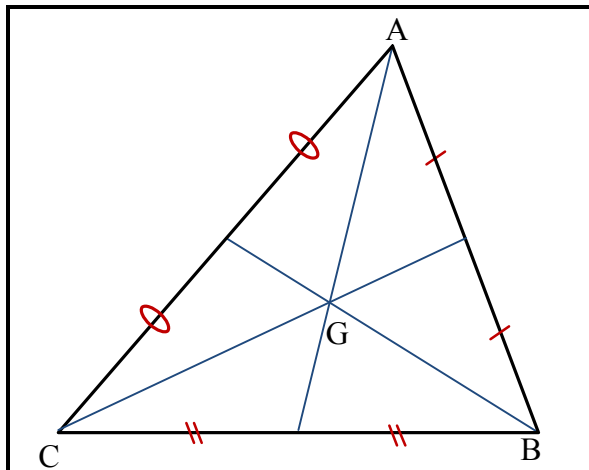
لدينا حسب الخاصية المميزة للمرشح:

$$\forall M \in (P) \overrightarrow{MK} = \frac{2}{3} \overrightarrow{MA} + \frac{1}{3} \overrightarrow{MB}$$

$$\overrightarrow{BK} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BA} \text{ : فنجد } M = B \text{ : نأخذ}$$

⚡ : لاحظ أنه رغم اختلاف الطريقتين إلا أن موضع النقطة G لا يتغير.

تمرين 3



بما أن G مرشح النقط المتزنة $(A, 1)$ و $(B, 1)$ و $(C, 1)$

فإن G تمثل مركز ثقل المثلث ABC أي نقطة تقاطع متوسطاته

⚡ : مرشح ثلاث نقط لها نفس المعامل يكون هو مركز ثقل المثلث الذي رؤوسه هذه النقط.

تمرين 4

لنبين أن بين أن O هو مرشح النقط المتزنة $(A, 1)$ و $(B, 1)$ و $(C, 1)$ و $(D, 1)$

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$$

أي لنبين أن: $ABCD$ متوازي أضلاع مركزه O إذن O هي منتصف قطريه $[AC]$ و $[BD]$

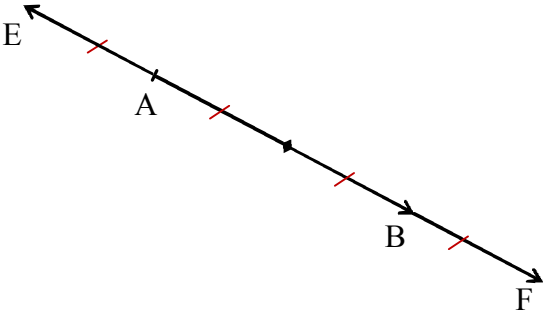
$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \text{ : بالتالي } \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0} \text{ و } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$$

⚡ : الشكل غير ضروري لكنه قد يساعد على إيجاد الفكرة.

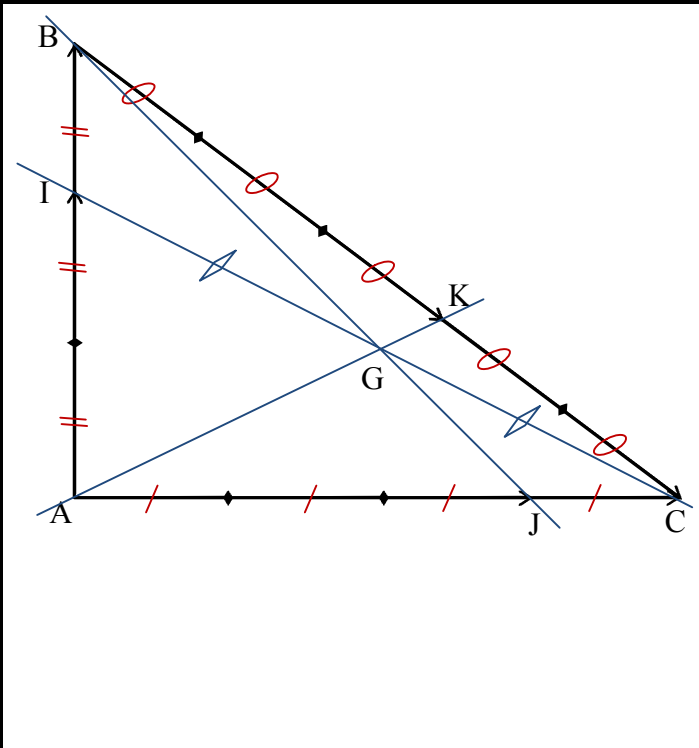
تمرين 5

G مرجح النقطتين المترتبتين $(A, 2)$ و $(B, 1)$	
بين أن A مرجح النقطتين المترتبتين $(G, -3)$ و $(B, 1)$ أي نبين : $-3\vec{AG} + \vec{AB} = \vec{0}$ لدينا G مرجح النقطتين المترتبتين $(A, 2)$ و $(B, 1)$ منه : $2\vec{GA} + \vec{GB} = \vec{0}$ منه $2\vec{GA} + \vec{AB} = \vec{0}$ منه $3\vec{GA} + \vec{AB} = \vec{0}$ بالتالي : $-3\vec{AG} + \vec{AB} = \vec{0}$	1
بين أن B مرجح النقطتين المترتبتين $(G, -6)$ و $(A, 4)$ أي نبين : $-6\vec{BG} + 4\vec{BA} = \vec{0}$ لدينا G مرجح النقطتين المترتبتين $(A, 2)$ و $(B, 1)$ منه : $2\vec{GA} + \vec{GB} = \vec{0}$ منه $2(\vec{GB} + \vec{BA}) + \vec{GB} = \vec{0}$ منه $2\vec{GB} + 2\vec{BA} + \vec{GB} = \vec{0}$ منه $3\vec{GB} + 2\vec{BA} = \vec{0}$ منه $-3\vec{BG} + 2\vec{BA} = \vec{0}$ بالتالي : $-6\vec{BG} + 4\vec{BA} = 2\vec{0} = \vec{0}$	2
الشكل غير ضروري لكنه قد يساعد على إيجاد الفكرة.	

تمرين 6

	لدينا E مرجح النقطتين المترتبتين $(A, 3)$ و $(B, -1)$ ، إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح: $\forall M \in (P) \vec{ME} = \frac{3}{2}\vec{MA} + \frac{-1}{2}\vec{MB}$ نأخذ: $M = A$ فيجد أن: $\vec{AE} = \frac{-1}{2}\vec{AB}$	1
	لدينا F مرجح النقطتين المترتبتين $(A, 1)$ و $(B, -3)$ ، إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح: $\forall M \in (P) \vec{MF} = \frac{1}{-2}\vec{MA} + \frac{-3}{-2}\vec{MB}$ نأخذ: $M = A$ فيجد أن: $\vec{AF} = \frac{3}{2}\vec{AB}$	2
لنكن : I منتصف $[AB]$ و لنبين أن I هي أيضا منتصف $[EF]$ أي لنبين أن $\vec{IE} + \vec{IF} = \vec{0}$ <u>الطريقة الأولى:</u> لدينا : $\vec{IE} + \vec{IF} = \vec{IA} + \vec{AE} + \vec{IA} + \vec{AF} = 2\vec{IA} + \frac{-1}{2}\vec{AB} + \frac{3}{2}\vec{AB} = 2\vec{IA} + \vec{AB} = 2\vec{IA} + \vec{AI} + \vec{IB} = \vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$ بالتالي للقطعتين $[AB]$ و $[EF]$ نفس المنتصف . <u>الطريقة الثانية:</u> باستعمال الخاصية المميزة للمرجح بالنسبة لـ $M = I$ المستعملة في السؤالين السابقين نجد أن: $\vec{IE} + \vec{IF} = \left(\frac{-1}{2} + \frac{3}{2}\right)\vec{IA} + \left(\frac{3}{2} + \frac{-1}{2}\right)\vec{IB} = \vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$ منه : $\vec{IF} = \frac{-1}{2}\vec{IA} + \frac{3}{2}\vec{IB}$ و $\vec{IE} = \frac{3}{2}\vec{IA} + \frac{-1}{2}\vec{IB}$ بالتالي للقطعتين $[AB]$ و $[EF]$ نفس المنتصف .		
الخاصية المميزة للمرجح مفيدة في إنشاء المرجح وفي كثير من البراهين.		

تمرين 7

	لدينا I مرجح النقطتين المترتبتين $(A,1)$ و $(B,2)$ إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح: $\forall M \in (P) \overrightarrow{MI} = \frac{1}{3} \overrightarrow{MA} + \frac{2}{3} \overrightarrow{MB}$ نأخذ: $M = A$ فنجد أن: $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB}$ لدينا J مرجح النقطتين المترتبتين $(A,1)$ و $(C,3)$ إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح: $\forall M \in (P) \overrightarrow{MJ} = \frac{1}{4} \overrightarrow{MA} + \frac{3}{4} \overrightarrow{MC}$ نأخذ: $M = A$ فنجد أن: $\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{4} \overrightarrow{AC}$ لدينا K مرجح النقطتين المترتبتين $(B,2)$ و $(C,3)$ إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح: $\forall M \in (P) \overrightarrow{MK} = \frac{2}{5} \overrightarrow{MB} + \frac{3}{5} \overrightarrow{MC}$ نأخذ: $M = A$ فنجد أن: $\overrightarrow{BK} = \frac{3}{5} \overrightarrow{BC}$	1
لدينا G مرجح النقط $(A,1)$ و $(B,2)$ و $(C,3)$ و I مرجح النقطتين $(A,1)$ و $(B,2)$ إذن حسب خاصية التجميعية فإن G مرجح النقط $(I,3)$ و $(C,3)$ أي أن G منتصف $[IC]$	2	2
بين أن المستقيمت (CI) و (BJ) و (AK) متلاقية في G لدينا G مرجح النقط $(A,1)$ و $(B,2)$ و $(C,3)$ و J مرجح النقطتين المترتبتين $(A,1)$ و $(C,3)$ إذن حسب خاصية التجميعية فإن G مرجح النقط $(B,2)$ و $(J,4)$ إذن $G \in (BJ)$ لدينا G مرجح النقط $(A,1)$ و $(B,2)$ و $(C,3)$ و K مرجح النقطتين المترتبتين $(B,2)$ و $(C,3)$ إذن حسب خاصية التجميعية فإن G مرجح النقط $(A,1)$ و $(K,5)$ إذن $G \in (AK)$ و حسب السؤال السلب $G \in (IC)$ بالتالي : المستقيمت (CI) و (BJ) و (AK) متلاقية في G	3	3
خاصية التجميعية مفيدة في كثير من البراهين حيث تكون كافية للبرهان عن الاستقامية لأن مرجح نقطتين تكون مستقيمة مع هتين النقطتين.		

تمرين 8

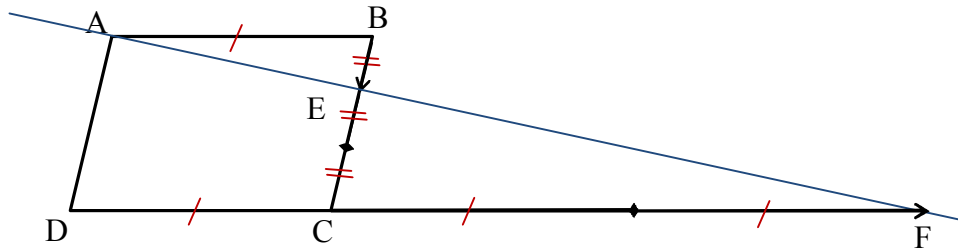
$\overrightarrow{DE} + 3\overrightarrow{EC} = \vec{0}$ و $2\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} = \vec{0}$	
1	لدينا $2\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} = \vec{0}$ منه : D مرجح النقطتين $(A, 2)$ و $(B, 1)$
2	لدينا $\overrightarrow{DE} + 3\overrightarrow{EC} = \vec{0}$ منه : E مرجح النقطتين $(C, 3)$ و $(D, -1)$
3	لبن أن النقطة C مرجح النظام المترنة : $\{(A, 2); (B, 1); (E, 6)\}$ أي لنبين أن : $2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + 6\overrightarrow{CE} = \vec{0}$ لدينا E مرجح النقطتين $(C, 3)$ و $(D, -1)$ منه : $\forall M \in (P) \overrightarrow{ME} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{MD} + \frac{3}{2}\overrightarrow{MC}$ نأخذ: $M = C$ فنجد أن: $(1) \overrightarrow{CE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ و لدينا D مرجح النقطتين $(A, 2)$ و $(B, 1)$ منه : $\forall M \in (P) \overrightarrow{MD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MB}$ نأخذ: $M = C$ فنجد أن: $(2) \overrightarrow{CD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$ من (1) و (2) نستنتج أن : $\overrightarrow{CE} = -\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}\right) = -\frac{1}{3}\overrightarrow{CA} - \frac{1}{6}\overrightarrow{CB}$ أي $\overrightarrow{CE} = -\frac{2}{6}\overrightarrow{CA} - \frac{1}{6}\overrightarrow{CB}$: $6\overrightarrow{CE} = -2\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}$ بالتالي : $2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + 6\overrightarrow{CE} = \vec{0}$ يمكن أيضا استعمال علاقة شال باستعمال المعطيات مباشرة ، لكن الأمر يتطلب استعمال متساويات كثيرة، لذلك استعمال الخاصية المميزة يسمح باختصار الوقت.
4	لبن أن النقط B و C و H مستقيمة . لدينا H مرجح النقطتين $(A, 1)$ و $(E, 3)$ إذن حسب خاصية الصمود H مرجح النقطتين المترنتين $(A, 2)$ و $(E, 6)$ و بما أن C مرجح : $(A, 2); (B, 1); (E, 6)$ فحسب خاصية التجميعية C مرجح : $(H, 8); (B, 1)$ بالتالي النقط B و C و H مستقيمة .
للبرهان على الاستقامية يمكن البرهان على أن إحدى النقط الثلاث مرجح باقي النقطتين. الشكل غير مطلوب ، لذلك لم يتم رسم أي شكل	

تمرين 9

O منتصف $[BC]$ و H مرجح $\{(C, 2); (B, 2); (A, -1)\}$	
1	لبن أن $\overrightarrow{OH} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$ لدينا : H مرجح $(C, 2); (B, 2); (A, -1)$ إذن $\forall M \in (P) \overrightarrow{MH} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{MA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{MB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{MC}$ نأخذ: $M = O$ فنجد أن: $\overrightarrow{OH} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OC}$: $\overrightarrow{OH} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$ منه : $\overrightarrow{OH} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$ (لأن $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ لكون O منتصف $[BC]$)
لم يتم رسم الشكل لكونه لا يتضمن الجديد	

لنبين أن النقطة O منتصف القطعة $[HG]$ أي نبين أن : $\vec{OH} + \vec{OG} = \vec{0}$ لدينا G مركز ثقل المثلث ABC إذن G مرجح $(A,1); (B,1); (C,1)$ إذن : $\vec{MG} = \frac{1}{3}\vec{MA} + \frac{1}{3}\vec{MB} + \frac{1}{3}\vec{MC}$ $\forall M \in (P)$ نأخذ : $M = O$ نجد : $\vec{OG} = \frac{1}{3}\vec{OA} + \frac{1}{3}\vec{OB} + \frac{1}{3}\vec{OC} = \frac{1}{3}\vec{OA} + \frac{1}{3}(\vec{OB} + \vec{OC}) = \frac{1}{3}\vec{OA}$ بالتالي : $\vec{OH} + \vec{OG} = \frac{-1}{3}\vec{OA} + \frac{1}{3}\vec{OA} = \vec{0}$	2
---	---

تمرين 10

لدينا F مرجح النقطتين المترتبتين $(D,-2)$ و $(C,3)$ إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح: $\forall M \in (P) \overrightarrow{MF} = \frac{3}{1} \overrightarrow{MC} + \frac{-2}{1} \overrightarrow{MD}$ نأخذ: $M = D$ فنجد أن: $\overrightarrow{DF} = 3 \overrightarrow{DC}$	لدينا E مرجح النقطتين المترتبتين $(B,2)$ و $(C,1)$ إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح: $\forall M \in (P) \overrightarrow{ME} = \frac{1}{3} \overrightarrow{MC} + \frac{2}{3} \overrightarrow{MB}$ نأخذ: $M = B$ فنجد أن: $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BC}$	1	
			
لنبين أن A مرجح النقطتين المترتبتين $(E,3)$ و $(F,-1)$ أي نبين : $3 \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AF} = \vec{0}$ $3 \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AF} = 3(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}) - (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF}) = 3 \overrightarrow{AB} + 3 \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DF} =$ $= 3 \overrightarrow{DC} + 3 \times \frac{1}{3} \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BC} - 3 \overrightarrow{DC}$ لدينا: $= \vec{0}$			2
نستنتج أن النقط A و E و F مستقيمة.			3

تمرين 11

لدينا F مرجح النقطتين المتزنتين $(A, 2)$ و $(B, 1)$ إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح: $\forall M \in (P) \overrightarrow{MF} = \frac{2}{3} \overrightarrow{MA} + \frac{1}{3} \overrightarrow{MB}$ نأخذ: $M = B$ فنجد أن: $\overrightarrow{BF} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BA}$	لدينا E مرجح النقطتين المتزنتين $(C, -3)$ و $(B, 1)$ إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح: $\forall M \in (P) \overrightarrow{ME} = \frac{-3}{-2} \overrightarrow{MC} + \frac{1}{-2} \overrightarrow{MB}$ نأخذ: $M = B$ فنجد أن: $\overrightarrow{BE} = \frac{3}{2} \overrightarrow{BC}$	
		1
لنبين أن $(CF) \parallel (AE)$ لدينا: $\overrightarrow{BF} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BA}$ منه $\overrightarrow{BA} = \frac{3}{2} \overrightarrow{BF}$ منه $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \frac{3}{2} \overrightarrow{FB} + \frac{3}{2} \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2} \overrightarrow{FC}$: منه $\overrightarrow{BA} = \frac{3}{2} \overrightarrow{BF}$ بالتالي $(CF) \parallel (AE)$		2

تمرين 12

لدينا F مركز ثقل المثلث ADC أي مرجح النقط $(A, 1)$ و $(D, 1)$ و $(C, 1)$ إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح: $(*) \forall M \in (P) \overrightarrow{MF} = \frac{1}{3} \overrightarrow{MA} + \frac{1}{3} \overrightarrow{MD} + \frac{1}{3} \overrightarrow{MC}$	لدينا E مركز ثقل المثلث ABC أي مرجح النقط $(A, 1)$ و $(B, 1)$ و $(C, 1)$	
لنبين أن $(EF) \parallel (BD)$ نأخذ في المتساوية $(*)$: $M = E$ فنجد أن: $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{EA})$ و بما أن E مرجح النقط $(A, 1)$ و $(B, 1)$ و $(C, 1)$ فإن: $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} = \vec{0}$ أي: $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EC} = -\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{DE}$ منه: $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{EA}) = \frac{1}{3} (\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED}) = \frac{1}{3} (\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{ED}) = \frac{1}{3} \overrightarrow{DC}$ بالتالي $(EF) \parallel (BD)$		1
الشكل غير ضروري لكنه يساعد في إيجال الفكرة أحيانا.		

تمرين 13

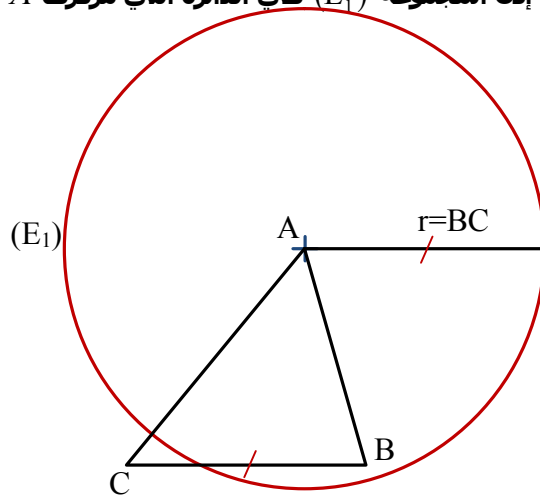
• لدينا $\vec{AE} = -\frac{2}{5} \vec{AB}$: منه $5 \vec{AE} = -2 \vec{AB}$: منه $5 \vec{AE} + 2 \vec{AB} = \vec{0}$: منه $5 \vec{AE} + 2(\vec{AE} + \vec{EB}) = \vec{0}$ • منه $5 \vec{AE} + 2 \vec{AE} + 2 \vec{EB} = \vec{0}$: منه $7 \vec{AE} + 2 \vec{EB} = \vec{0}$: منه $-7 \vec{EA} + 2 \vec{EB} = \vec{0}$ هذا يعني أن E مرشح النقطتين $(A, -7)$ و $(B, 2)$ • لدينا I منتصف $[BC]$ إذن I مرشح النقطتين $(B, 1)$ و $(C, 1)$ • لدينا $\vec{CF} = \frac{7}{9} \vec{CA}$: منه $9 \vec{CF} = 7 \vec{CA}$: منه $9 \vec{CF} - 7 \vec{CA} = \vec{0}$: منه $9 \vec{CF} - 7(\vec{CF} + \vec{FA}) = \vec{0}$ • منه $9 \vec{CF} - 7 \vec{CF} - 7 \vec{FA} = \vec{0}$: منه $2 \vec{CF} - 7 \vec{FA} = \vec{0}$: منه $-2 \vec{FC} - 7 \vec{FA} = \vec{0}$ هذا يعني أن E مرشح النقطتين $(C, -2)$ و $(A, -7)$ (أو أيضا $(C, 2)$ و $(A, 7)$ خاصية الصمود)	1
لنبين أن النقط E و I و F مستقيمية. لدينا E مرشح $(A, -7)$ و $(B, 2)$ إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح: $\forall M \in (P) \vec{ME} = -\frac{7}{-5} \vec{MA} + \frac{2}{-5} \vec{MB}$ لدينا F مرشح $(A, 7)$ و $(C, 2)$ إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح: $\forall M \in (P) \vec{MF} = \frac{2}{9} \vec{MC} + \frac{7}{9} \vec{MA}$ 2 نأخذ: $M = I$ فنجد أن: $\vec{IE} = \frac{7}{5} \vec{IA} - \frac{2}{5} \vec{IB}$ و $\vec{IF} = \frac{2}{9} \vec{IC} + \frac{7}{9} \vec{IA}$ ولدينا I منتصف $[BC]$: منه $\vec{IC} = -\vec{IB}$: منه $\vec{IF} = \frac{-2}{9} \vec{IB} + \frac{7}{9} \vec{IA}$ إذن: $9 \vec{IF} = -2 \vec{IB} + 7 \vec{IA}$ و $5 \vec{IE} = 7 \vec{IA} - 2 \vec{IB}$: منه $9 \vec{IF} = 5 \vec{IE}$ أي $\vec{IF} = \frac{5}{9} \vec{IE}$ بالتالي: النقط E و I و F مستقيمية.	2
الشكل غير ضروري لكنه يساعد في إيصال الفكرة أحيانا.	

تمرين 14

$A(3,4)$ و $B(0,2)$ و $C(3,2)$ لدينا E منتصف $[BC]$: منه $\begin{cases} x_E = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{3}{2} \\ y_E = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$: منه $E\left(\frac{3}{2}; 2\right)$ لدينا: G مرشح $(A, 1)$ و $(E, 2)$: منه $\begin{cases} x_G = \frac{2x_E + x_A}{3} = \frac{3+3}{3} = 2 \\ y_G = \frac{2y_E + y_A}{3} = \frac{4+4}{3} = \frac{8}{3} \end{cases}$: منه $G\left(2; \frac{8}{3}\right)$	1
لدينا: $\vec{OE}\left(\frac{3}{2}; 2\right)$ و $\vec{OG}\left(2; \frac{8}{3}\right)$ ولدينا: $\det(\vec{OG}, \vec{OE}) = \begin{vmatrix} 2 & \frac{8}{3} \\ \frac{3}{2} & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 2 - \frac{8}{3} \times \frac{3}{2} = 4 - 4 = 0$ بالتالي: O و G و C مستقيمية.	2
تذكير: إحداثيات مرشح (A, α) و (B, β) و ... و (K, λ) هي: $\begin{cases} x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \dots + \lambda x_K}{\alpha + \beta + \dots + \lambda} \\ y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \dots + \lambda y_K}{\alpha + \beta + \dots + \lambda} \end{cases}$	

لنحدد (E_1) مجموعة النقط M التي تحقق : $\|\overrightarrow{AM}\| = \|\overrightarrow{BC}\|$

لدينا : $\|\overrightarrow{AM}\| = \|\overrightarrow{BC}\|$ تعني : $AM = BC$ إذن المجموعة (E_1) هي الدائرة التي مركزها A و شعاعها $R = BC$

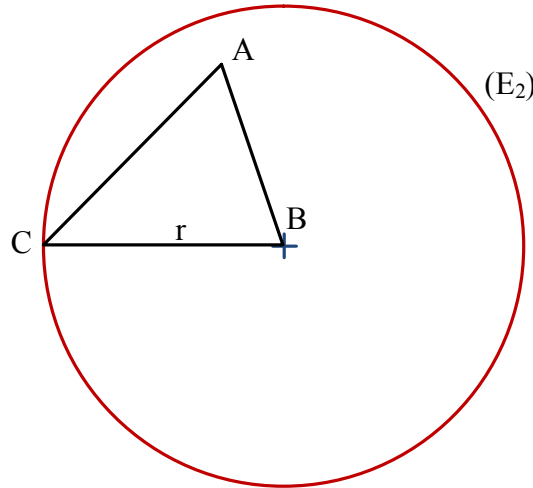


1

لنحدد (E_2) مجموعة النقط M التي تحقق : $\|\overrightarrow{BM}\| = \|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\|$

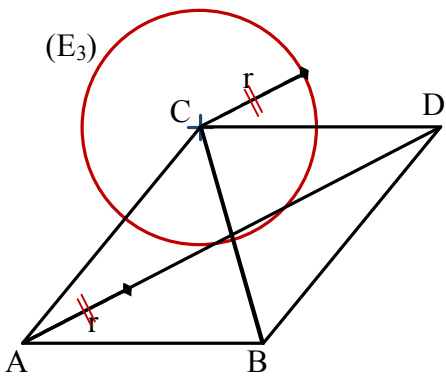
لدينا : $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$ منه : $\|\overrightarrow{BM}\| = \|\overrightarrow{CB}\|$ أي : $BM = BC$

بالتالي المجموعة (E_2) هي الدائرة التي مركزها B و شعاعها $R = BC$



2

تمرين 15



لنحدد (E_1) مجموعة النقط M التي تحقق : $\|4\overrightarrow{CM}\| = \|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\|$

نعتبر النقطة D حيث $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ (أي متوازي أضلاع $ABDC$)

منه : $\|4\overrightarrow{CM}\| = \|\overrightarrow{AD}\|$ أي : $4CM = AD$ أي : $CM = \frac{AD}{4}$

بالتالي المجموعة (E_3) هي الدائرة التي مركزها C و شعاعها $R = \frac{AD}{4}$

تمرين 16

1	لنحدد (ζ) مجموعة النقط M التي تحقق : $\ \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\ = 6$ نعتبر النقطة G مرجح النقط $(A,1)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$ (أي مركز ثقل المثلث ABC) لدينا حسب الخاصية المميزة للمرجح $\forall M \in (P) 3\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ منه : $\ 3\overrightarrow{MG}\ = 6$ أي $3MG = 6$ أي $MG = 2$ بالتالي (ζ) هي الدائرة التي مركزها G و شعاعها $r = 2$
2	لنحدد (Δ) مجموعة النقط M التي تحقق : $\ \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\ = \ \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\$ نعتبر النقطة I مرجح النقط $(A,1)$ و $(B,1)$ (أي منتصف $[AB]$) و النقطة J مرجح النقط $(B,1)$ و $(C,1)$ (أي منتصف $[BC]$) لدينا حسب الخاصية المميزة للمرجح $\forall M \in (P) 2\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$ و $\forall M \in (P) 2\overrightarrow{MJ} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ منه : $\ 2\overrightarrow{MI}\ = \ 2\overrightarrow{MJ}\$ أي $2MI = 2MJ$ أي $MI = MJ$ بالتالي (Δ) هو واسط القطعة $[IJ]$
3	لنحدد (L) مجموعة النقط M التي تحقق : $\ \overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\ = \ \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\$ نعتبر النقطة G مرجح النقطتين $(A,1)$ و $(B,3)$ لدينا حسب الخاصية المميزة للمرجح $\forall M \in (P) 4\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}$ منه : $\ 4\overrightarrow{MG}\ = \ \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{CM}\$ أي $\ 4\overrightarrow{MG}\ = \ \overrightarrow{CB}\$ أي $4MG = \frac{BC}{2}$ بالتالي (L) هي الدائرة التي مركزها G و شعاعها $r = \frac{BC}{2}$
لم يتم رسم الأشكال نظرا لكوننا تطرقنا لها في التمرين السابق. لا حظ أننا ستعمل المرجح لكي يتم تبسيط المجموع المتجهي داخل رمز المنظم، لكن وفي حال كان مجموع المعاملات منعدما (كما هو الحال في المثال الأخير فإنه يكون ممكنا تبسيط هذا التعبير دون استعمال المرجح)	