

المرجح القدرات المنتظرة

- استعمال المرجح في تبسيط تعبير متوجه;
- إنشاء مرجح n نقط (2 ≤ n ≤ 4) :
- استعمال المرجح لإثبات استقامية ثلاث نقط من المستوى;
- استعمال المرجح في إثبات تقاطع المستقيمات;
- استعمال المرجح في حل مسائل هندسية وفيزيائية.

I- مرجح نقطتين 1- النقطة متزنة تعريف

لتكن A نقطة من المستوى و α عدداً حقيقياً
ال الزوج $(A; \alpha)$ يسمى نقطة متزنة. نقول كذلك النقطة A معينة بالمعامل α . أو العدد α وزن النقطة A .

2- مرجح نقطتين أنشطة

(I) لتكن A و B نقطتين مختلفتين

1- بين أنه توجد نقطة وحيدة G حيث $\vec{GA} - 4\vec{GB} = \vec{0}$ ثم أنشئها

2- بين أنه توجد نقطة وحيدة G حيث $\vec{0} = 2\vec{GA} + 3\vec{GB}$ ثم أنشئها

(II) لتكن A و B نقطتين مختلفتين و α و β عددين حقيقيين غير منعدمين

1- بين إذا كان $\alpha + \beta \neq 0$ فان توجد نقطة وحيدة G حيث $\vec{\alpha}\vec{GA} + \vec{\beta}\vec{GB} = \vec{0}$

2- إذا كان $\alpha + \beta = 0$ فانه لا توجد أية نقطة G حيث $\vec{\alpha}\vec{GA} + \vec{\beta}\vec{GB} = \vec{0}$

مراهنة و تعريف

لتكن $(A; \alpha)$ و $(B; \beta)$ نقطتين متزنتين من المستوى حيث $\alpha + \beta \neq 0$.

توجد نقطة وحيدة G من المستوى حيث $\vec{\alpha}\vec{GA} + \vec{\beta}\vec{GB} = \vec{0}$

النقطة G تسمى مرجح النقطتين المتزنتين $(A; \alpha)$ و $(B; \beta)$

ملاحظة

إذا كان $\alpha + \beta = 0$ فان النقطتين المتزنتين $(A; \alpha)$ و $(B; \beta)$ لا تقبلان مرجحاً.

3- مركز ثقل نقطتين تعريف

مركز ثقل نقطتين A و B هو مرجح A و B المعينين بنفس المعامل الغير المنعدم.

خاصة

مركز ثقل نقطتين A و B هو منتصف $[AB]$

4- الصمود

ليكن $k \in \mathbb{R}^*$

$\alpha + \beta \neq 0 \quad \vec{\alpha}\vec{GA} + \vec{\beta}\vec{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow (B; \beta)$ و $(A; \alpha)$ مرجح النقطتين المتزنتين

$k\alpha + k\beta \neq 0 \quad k\vec{\alpha}\vec{GA} + k\vec{\beta}\vec{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow$

$(B; k\beta)$ و $(A; k\alpha)$ مرجح النقطتين المتزنتين

خاصة

مرجح نقطتين لا يتغير إذا ضربنا وزنيهما في نفس العدد الغير المنعدم.

تمرين

حدد α و β حيث G مرجح $(A; \alpha)$ و $(B; \beta)$ في الحالتين

$$2\vec{GA} - 3\vec{GB} = 5\vec{AB}$$

أ- $2\vec{GA} - 3\vec{GB} = 5\vec{AB}$

ب- مركز ثقل G و B .

5- الخاصية المميزة

نشاط

ليكن α و β عددين حقيقيين حيث $0 < \alpha + \beta < 1$

-1 بين أن G مرجح $(A; \alpha)$ و $(B; \beta)$ تكافئ $(A; \alpha) + (B; \beta) = (A + B; \alpha + \beta)$

-2 نسب المستوى (P) إلى معلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \overrightarrow{OA} + \frac{\beta}{\alpha + \beta} \overrightarrow{OB}$$

ب/ استنتج إحداثي G علماً أن $A(x_A; y_A)$ و $B(x_B; y_B)$

ج/ حدد إحداثي G مرجح $(A; -2)$ و $(B; 2)$ حيث $(A; -2) + (B; 2) = (A + B; \alpha + \beta)$

مبرهنة

α و β عددان حقيقيان حيث $0 < \alpha + \beta < 1$

تكون G مرجح $(A; \alpha)$ و $(B; \beta)$ إذا و فقط إذا كان لكل M من المستوى

$$\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta) \overrightarrow{MG}$$

نتحة

α و β عددان حقيقيان حيث $0 < \alpha + \beta < 1$

تكون G مرجح $(A; \alpha)$ و $(B; \beta)$ إذا و فقط إذا كان

$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{(\alpha + \beta)} \overrightarrow{AB}$ إذا و فقط إذا كان

$\overrightarrow{BG} = \frac{\alpha}{(\alpha + \beta)} \overrightarrow{BA}$ إذا و فقط إذا كان

ملاحظة

مرجح نقطتين مختلفتين A و B تنتهي إلى المستقيم (AB)

6- احداثياً مرجح نقطتين

في مستوى منسوب إلى معلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$. لتكن $A(x_A; y_A)$ و $B(x_B; y_B)$ و $G(x_G; y_G)$.

$$\begin{cases} x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta} \\ y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta} \end{cases}$$

إذا كان G مرجح $(A; \alpha)$ و $(B; \beta)$ فإن

تمرين

أنشئ G مرجح $(A; -2)$ و $(B; 3)$ ثم أنشئ G' مرجح $(A; 2)$ و $(B; 1)$

أحسب $\overrightarrow{GG'}$ بدلالة \overrightarrow{AB}

تمرين

أنشئ I مرجح $(A; 2)$ و $(C; 1)$ ثم J مرجح $(A; 1)$ و $(B; 2)$ و K مرجح $(C; 1)$ و $(B; -4)$

-1 أثبت أن B مرجح $(K; 3)$ و $(C; 1)$

-2 بين أن J منتصف $[KI]$

تمرين

لتكن $A \neq B$

-1 حدد مجموعة النقط M حيث $\|3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\| = 0$

-2 حدد مجموعة النقط M حيث $\|3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\|$

تمرين حدد إحداثي G مرجح $(A; -2)$ و $(B; 6)$ حيث $A(-4; 3)$ و $B(-1; 2)$

II- مرجح ثلاث نقاط

1- أنشطة

نشاط

هذا الملف تم تحميله من موقع Talamid.ma

لتكن A و B و C ثلث نقط من المستوى

$$\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} - 5\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

نشارط

لتكن A و B و C نقط مختلفة و α و β و λ أعداد حقيقية

$$(*) \quad \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \lambda\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

الجواب

$$(\alpha + \beta + \lambda)\overrightarrow{AG} = \beta\overrightarrow{AB} + \lambda\overrightarrow{AC}$$

لدينا (*) تكافئ

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{(\alpha + \beta + \lambda)}\overrightarrow{AB} + \frac{\lambda}{(\alpha + \beta + \lambda)}\overrightarrow{AC}$$

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \lambda\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

$$\beta\overrightarrow{AB} + \lambda\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

$$\text{إذا كان } \alpha + \beta + \lambda \neq 0 \text{ فان } \alpha + \beta + \lambda = 0 \text{ حيث }$$

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \lambda\overrightarrow{GC} = \vec{0} \text{ فإنه لا توجد نقطة } G \text{ حيث } \beta\overrightarrow{AB} + \lambda\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \lambda\overrightarrow{GC} = \vec{0} \text{ فإنه لا توجد نقطة } G \text{ حيث } \beta\overrightarrow{AB} + \lambda\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

2- مبرهنة وتعريف

لتكن $(A; \alpha)$ و $(B; \beta)$ و $(C; \lambda)$ نقط متزنة من المستوى حيث

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \lambda\overrightarrow{GC} = \vec{0} \text{ توجد نقطة وحيدة } G \text{ من المستوى حيث}$$

$$(C; \lambda) \text{ و } (B; \beta) \text{ و } (A; \alpha) \text{ تسمى مرجح}$$

ملاحظة

إذا كان $\alpha + \beta + \lambda = 0$ فإن النقطة المتزنة $(A; \alpha)$ و $(B; \beta)$ و $(C; \lambda)$ لا تقبل مرجحا

3- مركز ثقل ثلاث نقط

تعريف

مركز ثقل ثلاث نقط A و B و C هو مرجح A و B و C بنفس المعامل الغير المنعدم.

خاصية

مركز ثقل ثلاث نقط A و B و C هو مرجح $(A; 1)$ و $(B; 1)$ و $(C; 1)$

خاصية

متواسطات مثلث ABC تتلاقى في نقطة وحيدة G هي مركز ثقل المثلث

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

وتحقق $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$ و $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC'}$ و $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$

4- خاصية

مرجح ثلاث نقط لا يتغير إذا ضربنا وزنيهما في نفس العدد الغير المنعدم.

5- الخاصية المممة

نشاط

α و β و λ أعداد حقيقية حيث $\alpha + \beta + \lambda \neq 0$

- بين أن G مرجح $(A; \alpha)$ و $(B; \beta)$ و $(C; \lambda)$ تكافئ

- نسب المستوى (P) إلى معلم $(O; i; j)$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \lambda} \overrightarrow{OA} + \frac{\beta}{\alpha + \beta + \lambda} \overrightarrow{OB} + \frac{\lambda}{\alpha + \beta + \lambda} \overrightarrow{OC}$$

أ/ بين أن $B(x_B; y_B)$ و $A(x_A; y_A)$ علمًا أن G إحداثي

ب/ استنتج إحداثي G علمًا أن G على خط AB

مبرهنة

α و β و λ أعداد حقيقة حيث $\alpha + \beta + \lambda \neq 0$
 تكون G مرجح $(A; \alpha)$ و $(B; \beta)$ إذا فقط إذا كان لكل M من المستوى

$$\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \lambda \overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \lambda) \overrightarrow{MG}$$

6- احداثنا مرحج ثلاث نقط

في مستوى منسوب إلى معلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$. لتكن $C(x_C; y_C)$ و $B(x_B; y_B)$ و $A(x_A; y_A)$

$$\begin{cases} x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \lambda x_C}{\alpha + \beta + \lambda} \\ y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \lambda y_C}{\alpha + \beta + \lambda} \end{cases} \text{ فان } (C; \lambda) \text{ إذا كان } G \text{ مرجح } (A; \alpha) \text{ و } (B; \beta)$$

7- خاصية التجمعيّة

α و β و λ أعداد حقيقة حيث $\alpha + \beta + \lambda \neq 0$
 $\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \lambda \overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \lambda) \overrightarrow{MG}$ ومنه $(C; \lambda)$ و $(B; \beta)$ و $(A; \alpha)$ مرجح G
 لو كان $\alpha + \beta \neq 0$ فإن $(A; \alpha)$ و $(B; \beta)$ تقبل مرحجا G_1 ومنه

$$(\alpha + \beta) \overrightarrow{MG_1} + \lambda \overrightarrow{MC} = ((\alpha + \beta) + \lambda) \overrightarrow{MG}$$

 إذن G مرجح $(G_1; \alpha + \beta)$ و $(C; \lambda)$
 * بنفس الطريقة نبين أن G_2 حيث $(B; \beta)$ و $(G_2; \alpha + \lambda)$ مرجح G
 * بنفس الطريقة نبين أن G_3 حيث $(A; \alpha)$ و $(G_3; \beta + \lambda)$ مرجح G

خاصية

مرحج ثلاث نقط لا يتغير إذا عوضنا نقطتين بمرجحهما معينا بمجموع معامليهما الغير المنعدم.

تمرين

أنشئ G مرجح $(A; 1)$ و $(B; 1)$ و $(C; 2)$

أنشئ $'G$ مرجح $(A; -3)$ و $(B; 2)$ و $(C; -1)$

تمرين

$\overrightarrow{AD} = \frac{4}{5} \overrightarrow{AB}$ مثلث و G مرجح $(A; 1)$ و $(B; 4)$ و $(C; -2)$ نقطة حيث D نقطة حيث $(A; 1)$ و $(B; 4)$ و $(C; -2)$

أنشئ الشكل بين أن D و C و G مستقيمية

تمرين

مثلث. حدد مجموعة النقط M حيث G مرجح $(A; 1)$ و $(B; 1)$ و $(C; 1)$

III- مرحج أربع نقط

1- مبرهنة وتعريف

لتكن $(A; \alpha)$ و $(B; \beta)$ و $(C; \lambda)$ و $(D; \mu)$ نقط متزنة من المستوى حيث $\alpha + \beta + \lambda + \mu \neq 0$.

توجد نقطة وحيدة G من المستوى حيث $(D; \mu)$ و $(C; \lambda)$ و $(B; \beta)$ و $(A; \alpha)$ مرجح G تسمى مرحجا

ملاحظة

إذا كان $\alpha + \beta + \lambda + \mu = 0$ فإن النقطة المتزنة $(A; \alpha)$ و $(B; \beta)$ و $(C; \lambda)$ و $(D; \mu)$ لا تقبل مرحجا

2- مركز ثقل أربع نقط

تعريف

مركز ثقل أربع نقط A و B و C و D المعينين بنفس المعامل الغير المنعدم.

خاصة

مركز ثقل أربع نقاط A و B و C و D هو مرجح $(A;1)$ و $(B;1)$ و $(C;1)$ و $(D;1)$

3- خاصة

مرجح أربع نقاط لا يتغير إذا ضربنا وزنيهما في نفس العدد الغير المنعدم.

**4- الخاصية المميزة
مترهنة**

و α و β و λ و μ أعداد حقيقية حيث $\alpha + \beta + \lambda + \mu \neq 0$
تكون G مرجح $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و $(C;\lambda)$ و $(D;\mu)$ إذا و فقط إذا كان لكل M من المستوى
$$\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \lambda \overrightarrow{MC} + \mu \overrightarrow{MD} = (\alpha + \beta + \lambda + \mu) \overrightarrow{MG}$$

**5- خاصية التجميعة
خاصة**

مرجح أربع نقاط لا يتغير إذا عوضنا نقطتين بمرجحهما معينا بمجموع معامليهما الغير المنعدم أو عوضنا
ثلاث نقاط بمرجحها معينا بمجموع معاملاتها.

تمرين

متوازي الأضلاع $ABCD$
أنشئ G مرجح $(A;1)$ و $(B;1)$ و $(C;2)$ و $(D;1)$
بين أن $G \in (AC)$