TD- PRODUIT VECTORIEL
Exercices d'applications

dans tous les exercices l'espace est muni d'un repère orthonormée directe $\left(0;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$

Exercice1 : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que :
$\|\vec{u}\|=1$ et $\|\vec{v}\|=3$ et $\left(\overline{\vec{u};\vec{v}}\right)=\frac{\pi}{3}$

Calculer : $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|$

Exercice2 : $\vec{u}(1;1;1)$ et $\vec{v}(2;1;2)$ deux vecteurs:

Calculer : $\vec{u}\wedge\vec{v}$

Exercice3 : $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$ et $\vec{v}=3\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k}$

Calculer : $\vec{u}\wedge\vec{v}$

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix}2 & -2\\ 1 & -1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & -1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & -2\end{vmatrix}\vec{k}=4\vec{j}-8\vec{k}$$

Exercice4 : on considère les points $A(0;1;2)$ et $B(1;1;0)$ et $C(1;0;1)$

1)Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ et vérifier que les points A et B et C sont non alignés
2)Calculer la surface du triangle ABC
3)Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC)

Exercice5 : L'espace est muni d'un repère orthonormé
Quelle est l'intersection des plans d'équations respectives (P) $x-y+2z+1=0$ et (P') $2x+y-z+2=0$

Exercice6 : calculer la distance du point $M(-1;0;1)$ à la droite (D) dont une représentation paramétrique est : $(D):\begin{cases}x=-1+t\\ y=5t\\ z=3t\end{cases}\quad(t\in\mathbb{R})$

Exercice7 : soit ABCDEFGH un cube dans L'espace orienté muni d'un repère orthonormé directe $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AE}\right)$ et soit I milieu du segment $[EF]$ et K centre de gravité du carré ADHE

1)a)Montrer que $\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{IG}\wedge\overrightarrow{IA}$
b) En déduire la surface du triangle IGA
2) on suppose que ABCD est un quadrilatère convexe de diagonales qui se coupent en T et soit Ω un point tel que : $\overrightarrow{D\Omega}=\overrightarrow{BT}$

2)a) comparer les distances : BD et ΩT et comparer la surface des triangles ABD et $A\Omega T$
2)b) Montrer que $\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{A\Omega}=\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{BD}$

Exercice8: On considère, dans un repère orthonormé, les points:
$A(0, 0, 0)$; $B(2, 1, -1)$ et $C(1, 1, 1)$.

1)Calculer $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ et en déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2)Déterminer une équation du plan (ABC).
3)Déterminer le rayon de la sphère de centre $M_k(0, 0, k)$ tangente au plan (ABC). Combien y a-t-il de sphères de rayon 2 parmi celles-ci ? On note S celle correspondant à la plus grande valeur de k.
4)Déterminer l'ensemble des points $D(x, y, z)$ vérifiant $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AB}=0$ (on en donnera une équation paramétrique).
5)Parmi les points de l'ensemble précédent, combien appartiennent au plan (ABC) ? Que représentent-ils alors ?
6)On note désormais $D(2, -1, 1)$. Déterminer la distance de D aux trois points A, B et C, ainsi que le projeté orthogonal de D sur (ABC), et la distance de D à ce dernier.
7)En déduire le volume du tétraèdre $ABCD$.
8)Déterminer une équation du plan tangent à S, perpendiculaire à (ABC) et à (BCD).
9. Déterminer une équation paramétrique des hauteurs issues de A et D (droites passant par le point et perpendiculaires à la face opposée) dans le tétraèdre $ABCD$. Montrer que ces droites sont sécantes en un point H appartenant également à la hauteur issue de B.
10. Déterminer un système d'équations cartésiennes de l'unique droite perpendiculaire simultané-ment à (AD) et à (BC) et vérifier que H appartient à cette droite.

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien