

## TD- PRODUIT VECTORIEL Exercices d'applications

dans tous les exercices l'espace est muni d'un repère orthonormé direct  $(0; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

**Exercice1 :**  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs tels que :

$$\|\vec{u}\| = 1 \text{ et } \|\vec{v}\| = 3 \text{ et } \left(\vec{u}; \vec{v}\right) = \frac{\pi}{3}$$

Calculer :  $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$

**Solution :**

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \sin \theta = 1 \cdot 3 \sin \frac{\pi}{3} = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

**Exercice2 :**  $\vec{u}(1;1;1)$  et  $\vec{v}(2;1;2)$  deux vecteurs:

Calculer :  $\vec{u} \wedge \vec{v}$

**Solution :**

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{k} = \vec{i} - 0\vec{j} - \vec{k} = \vec{i} - \vec{k}$$

**Exercice3 :**  $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$  et  $\vec{v} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$

Calculer :  $\vec{u} \wedge \vec{v}$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \vec{k} = 4\vec{j} - 8\vec{k}$$

**Exercice4 :** on considère les points  $A(0;1;2)$  et  $B(1;1;0)$  et  $C(1;0;1)$

1) Déterminer les coordonnées du vecteur

$\vec{AB} \wedge \vec{AC}$  et vérifier que les points

A et B et C sont non alignés

2) Calculer la surface du triangle ABC

3) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC)

**Solution :1)**  $\vec{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$

$\vec{AB}(1;0;-2)$  et  $\vec{AC}(1;-1;-1)$

$$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \vec{k} = -2\vec{i} - 1\vec{j} - 1\vec{k}$$

$\vec{AB} \wedge \vec{AC} \neq \vec{0}$  Donc les points A et B et C sont non alignés

2)  $S_{ABC} = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$

$$\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

$$\text{Donc : } S_{ABC} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

3)  $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = -2\vec{i} - 1\vec{j} - 1\vec{k}$  un vecteur normal du plan ABC

Donc une équation cartésienne du plan ABC est de la forme :

$$ax + by + cz + d = 0$$

$\vec{AB} \wedge \vec{AC}(-2;-1;-1)$  donc  $a = -2$  et  $b = -1$  et  $c = -1$

$$\text{Donc : } -2x - 1y - 1z + d = 0 \text{ (ABC)}$$

Et on a :  $A(0;1;2) \in (P)$  donc :  $0 - 1 - 2 + d = 0$

donc  $d = 3$

$$\text{Donc(ABC) : } -2x - 1y - 1z + 3 = 0$$

$$\text{Donc(ABC) : } 2x + y + z - 3 = 0$$

**Exercice5 :** L'espace est muni d'un repère orthonormé

Quelle est l'intersection des plans d'équations respectives

$$(P) x - y + 2z + 1 = 0 \text{ et } (P') 2x + y - z + 2 = 0$$

**Solution :**  $\vec{n}(1;-1;2)$  et  $\vec{n'}(2;1;-1)$  deux vecteurs

normaux respectivement de (P) et (P')

$$\text{On a : } \vec{u} = \vec{n} \wedge \vec{n'} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$\text{Donc : } \vec{u} = \vec{n} \wedge \vec{n'} = -\vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k} \neq \vec{0}$$

les plans (P) et (P') sont sécants suivant une droite (D)

et  $\vec{u}(-1;5;3)$  est un vecteur directeur de (D)

et la droite (D) passe par  $A(-1;5;3)$  (il suffit de donner par exemple  $z = 0$  et résoudre le système et calculer  $x$  et  $y$ )

Donc : une représentation paramétrique de

$$(D) \text{ est } (D): \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 5t \\ z = 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

**Exercice6 :** calculer la distance du point

$M(-1;0;1)$  à la droite (D) dont une

représentation paramétrique est :  $(D)$  :

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 5t \\ z = 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

**Solution** : la droite  $(D)$  passe par :  $A(1; -1; 0)$

et  $\vec{u}(2; -1; 2)$  est un vecteur directeur de  $(D)$

et  $\overrightarrow{AM}(-2; 1; 1)$

$$\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{k} = 3\vec{i} + 6\vec{j}$$

$$\text{Donc : } \|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\| = \sqrt{9+36} = 3\sqrt{5} \text{ et } \|\vec{u}\| = \sqrt{4+1+4} = 3$$

$$\text{Donc : } d(M; (D)) = \frac{3\sqrt{5}}{3} = \sqrt{5}$$

**Exercice7** : soit ABCDEFGH un cube dans L'espace orienté muni d'un repère orthonormé directe  $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AE})$

Soit I milieu du segment  $[EF]$  et K centre de gravité du carré ADHE

1)a) Montrer que  $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA}$

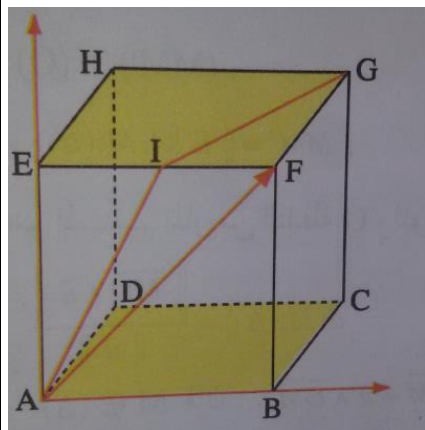
b) En déduire la surface du triangle IGA

2) on suppose que ABCD est un quadrilatère convexe de diagonales qui se coupent en T et soit  $\Omega$  un point tel que :  $\overrightarrow{D\Omega} = \overrightarrow{BT}$

2)a) comparer les distances :  $BD$  et  $\Omega T$  et comparer la surface des triangles  $ABD$  et  $A\Omega T$

2)b) Montrer que  $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{A\Omega} = \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BD}$

**Solution** : 1) a) dans le repère  $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AE})$



On a :  $A(0;0;0)$  et  $B(1;0;0)$  et  $D(0;1;0)$  et  $E(0;0;1)$  et  $F(1;0;1)$

et  $G(1;1;1)$  et  $H(0;1;1)$  et  $I(\frac{1}{2}; 0; 1)$  et

$$K(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})$$

donc :  $\overrightarrow{BK}(-1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})$  et  $\overrightarrow{IG}(\frac{1}{2}; 1; 0)$  et  $\overrightarrow{IA}(-\frac{1}{2}; 0; -1)$

$$\overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \overrightarrow{AB} - \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \overrightarrow{AD} + \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \overrightarrow{AE}$$

$$\overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} \text{ cad } \overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA}(-1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})$$

$$\text{Donc : } \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA}$$

$$\text{b) } S_{IGA} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA}\| = \frac{1}{2} \sqrt{(-1)^2 + (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

2)a) on a :  $\overrightarrow{D\Omega} = \overrightarrow{BT}$  donc  $BT\Omega D$  est un

parallélogramme donc :  $\overrightarrow{\Omega T} = \overrightarrow{DB}$

Donc  $\Omega T = DB$

Soit M la projection orthogonal de A sur la droite  $(BD)$  donc  $(AM)$  c'est la hauteur des deux triangles  $ABD$  et  $A\Omega T$  donc :

$$S_{ABD} = \frac{1}{2} AM \times BD \text{ et } S_{A\Omega T} = \frac{1}{2} AM \times \Omega T$$

Et puisque :  $\Omega T = DB$  alors  $S_{A\Omega T} = S_{ABD}$

2)b) Montrons que  $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{A\Omega} = \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BD}$

$$\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{A\Omega} = \overrightarrow{AC} \wedge (\overrightarrow{AT} + \overrightarrow{T\Omega}) = \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AT} + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{T\Omega}$$

On a :  $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AT} = \vec{0}$  car les points A et C et T sont alignés

$$\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{A\Omega} = \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BD} \text{ (car } \overrightarrow{T\Omega} = \overrightarrow{BD} \text{)}$$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien

