

TD- PRODUIT VECTORIEL Exercices d'applications

dans tous les exercices l'espace est muni d'un repère orthonormée directe $(0; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

Exercice1 : \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs tels que :

$$\|\vec{u}\|=1 \text{ et } \|\vec{v}\|=3 \text{ et } (\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\pi}{3}$$

Calculer : $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$

Solution :

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \sin \theta = 1 \cdot 3 \sin \frac{\pi}{3} = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Exercice2 : $\vec{u}(1;1;1)$ et $\vec{v}(2;1;2)$ deux vecteurs:

Calculer : $\vec{u} \wedge \vec{v}$

Solution :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = \vec{i} - 0\vec{j} - \vec{k} = \vec{i} - \vec{k}$$

Exercice3 : $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{v} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$

Calculer : $\vec{u} \wedge \vec{v}$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \vec{k} = 4\vec{j} - 8\vec{k}$$

Exercice4 : on considère les points $A(0;1;2)$ et $B(1;1;0)$ et $C(1;0;1)$

1) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et vérifier que les points A et B et C sont non alignés

2) Calculer la surface du triangle ABC

3) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC)

Solution : 1) $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$

$\overrightarrow{AB}(1;0;-2)$ et $\overrightarrow{AC}(1;-1;-1)$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \vec{k} = -2\vec{i} - 1\vec{j} - 1\vec{k}$$

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ Donc les points A et B et C sont non alignés

$$2) S_{ABC} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$$

$$\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

Donc : $S_{ABC} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

3) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = -2\vec{i} - 1\vec{j} - 1\vec{k}$ un vecteur normal du plan ABC

Donc une équation cartésienne du plan ABC est de la forme :

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(-2; -1; -1) \text{ donc } a = -2 \text{ et } b = -1 \text{ et } c = -1$$

$$\text{Donc : } -2x - 1y - 1z + d = 0 \quad (ABC)$$

$$\text{Et on a : } A(0;1;2) \in (P) \text{ donc : } 0 - 1 - 2 + d = 0$$

$$\text{donc } d = 3$$

$$\text{Donc } (ABC) : -2x - 1y - 1z + 3 = 0$$

$$\text{Donc } (ABC) : 2x + y + z - 3 = 0$$

Exercice5 : L'espace est muni d'un repère orthonormé

Quelle est l'intersection des plans d'équations respectives

$$(P) x - y + 2z + 1 = 0 \text{ et } (P') 2x + y - z + 2 = 0$$

Solution : $\vec{n}(1; -1; 2)$ et $\vec{n}'(2; 1; -1)$ deux vecteurs

normaux respectivement de (P) et $(P)'$

$$\text{On a : } \vec{u} = \vec{n} \wedge \vec{n}' = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$\text{Donc : } \vec{u} = \vec{n} \wedge \vec{n}' = -\vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k} \neq \vec{0}$$

les plans (P) et $(P)'$ sont sécants suivant une droite (D)

et $\vec{u}(-1; 5; 3)$ est un vecteur directeur de (D)

et la droite (D) passe par $A(-1; 5; 3)$ (il suffit de donner par exemple $z = 0$ et résoudre le système et calculer x et y)

Donc : une représentation paramétrique de

$$(D) \text{ est } (D) : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 5t \\ z = 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Exercice6 : calculer la distance du point $M(-1; 0; 1)$ à la droite (D) dont une

représentation paramétrique est : (D) :

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 5t \\ z = 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Solution : la droite (D) passe par : $A(1; -1; 0)$

et $\vec{u}(2; -1; 2)$ est un vecteur directeur de (D)

et $\overrightarrow{AM}(-2; 1; 1)$

$$\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{k} = 3\vec{i} + 6\vec{j}$$

Donc : $\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\| = \sqrt{9+36} = 3\sqrt{5}$ et $\|\vec{u}\| = \sqrt{4+1+4} = 3$

$$\text{Donc : } d(M; (D)) = \frac{3\sqrt{5}}{3} = \sqrt{5}$$

Exercice 7 : soit ABCDEFGH un cube dans l'espace orienté muni d'un repère orthonormé directe $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AE})$

Soit I milieu du segment $[EF]$ et K centre de gravité du carré ADHE

1)a) Montrer que $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA}$

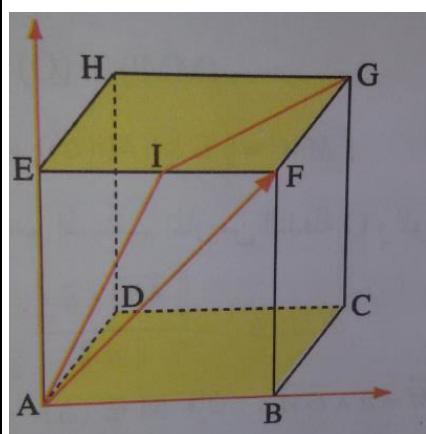
b) En déduire la surface du triangle IGA

2) on suppose que ABCD est un quadrilatère convexe de diagonales qui se coupent en T et soit Ω un point tel que : $\overrightarrow{D\Omega} = \overrightarrow{BT}$

2)a) Comparer les distances : BD et ΩT et comparer la surface des triangles ABD et $A\Omega T$

2)b) Montrer que $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{A\Omega} = \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BD}$

Solution : 1) a) dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AE})$



On a : $A(0; 0; 0)$ et $B(1; 0; 0)$ et $D(0; 1; 0)$ et

$E(0; 0; 1)$ et $F(1; 0; 1)$

et $G(1; 1; 1)$ et $H(0; 1; 1)$ et $I\left(\frac{1}{2}; 0; 1\right)$ et

$$K\left(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

donc : $\overrightarrow{BK}\left(-1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ et $\overrightarrow{IG}\left(\frac{1}{2}; 1; 0\right)$ et $\overrightarrow{IA}\left(-\frac{1}{2}; 0; -1\right)$

$$\overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \overrightarrow{AB} - \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \overrightarrow{AD} + \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \overrightarrow{AE}$$

$$\overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} \text{ cad } \overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA}\left(-1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

Donc : $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA}$

$$\text{b) } S_{IGA} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA}\| = \frac{1}{2} \sqrt{(-1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

2)a) on a : $\overrightarrow{D\Omega} = \overrightarrow{BT}$ donc $BT\Omega D$ est un parallélogramme donc : $\overrightarrow{\Omega T} = \overrightarrow{DB}$

Donc $\Omega T = DB$

Soit M la projection orthogonale de A sur la droite (BD) donc (AM) c'est la hauteur des deux triangles ABD et $A\Omega T$ donc :

$$S_{ABD} = \frac{1}{2} AM \times BD \text{ et } S_{A\Omega T} = \frac{1}{2} AM \times \Omega T$$

Et puisque : $\Omega T = DB$ alors $S_{A\Omega T} = S_{ABD}$

2)b) Montrons que $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{A\Omega} = \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BD}$

$$\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{A\Omega} = \overrightarrow{AC} \wedge (\overrightarrow{AT} + \overrightarrow{T\Omega}) = \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AT} + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{T\Omega}$$

On a : $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AT} = \vec{0}$ car les points A et C et T sont alignés

$$\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{A\Omega} = \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BD} \text{ (car } \overrightarrow{T\Omega} = \overrightarrow{BD})$$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien

