

## Le PRODUIT VECTORIEL

### 1) ORIENTATION DE L'ESPACE

L'espace ( $\mathcal{E}$ ) est muni d'un repère  $(0; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  orthonormé et  $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  la base qui lui est associée.

On pose un observateur (imaginaire) sur l'axe  $[Oz]$  et il regarde vers l'axe  $[Ox]$ ; On aura deux positions pour l'axe  $[Oy]$ :

**1er cas** :  $[Oy]$  est à la droite de l'observateur

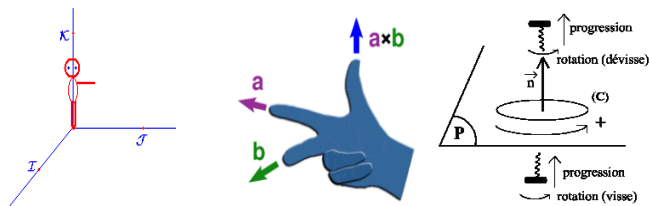
On dit que la base  $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  est **indirecte** de même pour le

Repère  $(0; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

**2eme cas** :  $[Oy]$  est à la gauche de l'observateur

On dit que la base  $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  est **directe** de même pour le

Repère  $(0; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$



### 2) DEFINITION DU PRODUIT VECTORIEL.

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs dans  $\mathcal{V}_3$ .

Le produit vectoriel des deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est le vecteur  $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$  tel que

• Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires alors :  $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$

• Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont non colinéaires

Le vecteur  $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$  est tel que :

$\vec{w} \perp \vec{u}$  et  $\vec{w} \perp \vec{v}$  et la base  $(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w})$  est directe

Et  $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \sin \theta$  ou  $(\vec{u}; \vec{v}) = \theta$

**Remarque** : si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont non colinéaires.

Soit  $A$  un point dans l'espace ; ils existent deux points dans l'espace  $B$  et  $C$  tels que :  $\vec{u} = \vec{AB}$  et  $\vec{v} = \vec{AC}$ , les points  $A, B$  et  $C$  étant non alignés, ils définissent un plan  $(P)$  dans l'espace ( $\mathcal{E}$ ).

Et  $\vec{w} = \vec{AB} \wedge \vec{AC}$  est un vecteur normale au plan  $(P)$  (utilisable pour déterminer l'Equation cartésienne d'un plan.)

### 3) Propriétés :

$$1) \vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0} \quad 2) \vec{v} \wedge \vec{u} = -(\vec{u} \wedge \vec{v})$$

$$3) (\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \wedge \vec{w}) + (\vec{v} \wedge \vec{w})$$

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) + (\vec{u} \wedge \vec{w})$$

$$(\lambda \vec{u}) \wedge \vec{v} = \lambda (\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{u} \wedge (\lambda \vec{v})$$

4) Soient  $A, B$  et  $C$  trois points non alignés on a

$\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$  : est la surface du parallélogramme

$ABA'C$

5) Soient  $A, B$  et  $C$  trois point non alignés, la surface du

triangle  $ABC$  est :  $S_{ABC} = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$

6)  $A, B$  et  $C$  sont alignés si et seulement ssi  $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \vec{0}$

### 4) L'EXPRESSION ANALYTIQUE DU PRODUIT VECTORIEL

Soient  $B(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  une base orthonormée directe de  $\mathcal{V}_3$ , et deux vecteurs

$\vec{u}(x; y; z)$  et  $\vec{u}'(x'; y'; z')$  on a :

$$\vec{u} \wedge \vec{u}' = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{k}$$

**Exemple** :  $\vec{u}(1; 1; 1)$  et  $\vec{v}(2; 1; 2)$  deux vecteurs:

Calculer :  $\vec{u} \wedge \vec{v}$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = \vec{i} - 0\vec{j} - \vec{k} = \vec{i} - \vec{k}$$

### 5) Intersection de deux plans

Soient  $(P)$  et  $(Q)$  deux plan dans l'espace où  $\vec{n}$  est un vecteur normal sur  $(P)$  et  $\vec{m}$  est un vecteur normal sur  $(Q)$ , si  $\vec{n}$  et  $\vec{m}$  sont non colinéaires alors  $(P)$  et  $(Q)$  se coupent selon une droite  $(\Delta)$  dirigée par  $\vec{n} \wedge \vec{m}$

### 6) Distance d'un point par rapport à une droite.

Soient  $D(A; \vec{u})$  : une droite dans l'espace et  $M$  un point ;

la distance du point  $M$  à la droite  $(D)$  est/

$$d(M; (D)) = MH = \frac{\|\vec{u} \wedge \vec{AM}\|}{\|\vec{u}\|}$$

(Cette propriété reste vraie si  $M \in (D)$ )

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.  
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que

l'on devient un mathématicien

