



Exercice1 : déterminer le PGCD `a l'aide de la décomposition en facteurs premiers

Déterminer le PGCD de 4480 et 400 `a l'aide de la décomposition en facteurs premiers.

Exercice2 : déterminer le PGCD a l'aide de l'algorithme d'Euclide

Déterminer le PGCD de 3045 et 300 a l'aide de l'algorithme d'Euclide.

Exercice3 : PGCD : calcul avec un paramètre

Pour tout entier naturel non nul, on pose : $a = 5n + 1$ et $b = 2n - 1$. On note $\Delta = \text{PGCD}(a ; b)$.

1. Démontrer que les valeurs possibles de Δ sont 1 ou 7.

2. Déterminer les entiers n tels que :

$a \equiv 0 \pmod{7}$ et $b \equiv 0 \pmod{7}$.

3. En déduire, suivant les valeurs de n , la valeur de Δ .

Exercice4 : PGCD ($a ; b$) = PGCD($b ; r$) et Application

Soient a et b deux entiers tels que $0 < b \leq a$.

Démontrer que : $\text{PGCD}(a ; b) = \text{PGCD}(b ; r)$ où r est le reste dans la division euclidienne de a par b .

Exercice5 : PGCD : l'algorithme d'Euclide

Soient a et b deux entiers naturels, on note $D(a ; b)$

l'ensemble des diviseurs communs de a et b . Dans la suite, on considère que $a > b > 0$.

1. a) Montrer que $D(a ; b) = D(a - b ; b)$.

b) En déduire que $\text{PGCD}(a ; b) = \text{PGCD}(a - b ; b)$.

2. Soit r le reste dans la division euclidienne de a par b , montrer, en vous aidant de la question précédente, que $\text{PGCD}(a ; b) = \text{PGCD}(r ; b)$.

3. En vous aidant des divisions euclidiennes ci-dessous, déterminer : $\text{PGCD}(416 ; 182)$.

$416 = 2 \times 182 + 52$ et $182 = 3 \times 52 + 26$ et $52 = 2 \times 26 + 0$

Exercice6 : PGCD : utiliser la caractérisation d'un PGCD

Trouver les entiers naturels a et b avec $a < b$ tels que :

$ab = 7776$ et $\text{PGCD}(a ; b) = 18$

Exercice7 : PGCD : diviseurs communs

Si on divise 4 294 et 3 521 par un même entier naturel non nul n , les restes respectifs sont 10 et 11.

Quel est cet entier ?

Exercice8: PGCD : PGCD égal a la différence

Soient a et b deux entiers naturels avec $a > b > 0$, montrer que $\text{PGCD}(a ; b) = a - b$ si et seulement si, il existe un entier k tel que $a = (k + 1)(a - b)$ et $b = k(a - b)$.

Exercice99 : PGCD : la boite de cubes

Une boite parallélépipédique rectangle de dimensions intérieures 31,2 cm, 13 cm et 7,8 cm est entièrement remplie par des cubes à jouer dont l'arête est un nombre entier de millimètres. Quel est le nombre minimal de cubes que peut contenir cette boite ?

Exercice10 : Nombres premiers : PGCD et PPCM

On pose $a = 588$ et $b = 616$.

1. décomposer a et b en produits de facteurs premiers.
2. En déduire $\text{PGCD}(a ; b)$.

3. déduire également de la première question PPCM ($a ; b$) (c'est à dire le plus petit multiple commun de a et b)

Exercice11: PGCD et suite

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$u_{n+1} = 4u_n + 1 \text{ et } u_0 = 0$$

1. a) Calculer u_1 , u_2 et u_3 .

b) Montrer que pour tout entier naturel n , u_{n+1} et u_n sont premiers entre eux.

2. On pose pour tout entier naturel n , $v_n = u_n + \frac{1}{3}$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique.

b) En déduire l'expression de v_n puis celle de u_n en fonction de n .

$$3. \text{ Calculer } \text{PGCD}(4^{n+1} - 1 : 4^n - 1)$$

Exercice12 : Nombres de Fermat et infinitude des nombres premiers

On rappelle que les nombres de Fermat sont les entiers

$$F_n = 2^{2^n} + 1 \text{ Avec } n \text{ un entier naturel.}$$

1. Etablir que pour tous entiers naturels n et k , on a :

$$F_{n+k} - 1 = (F_n - 1)^{2^k}.$$

2. En déduire que si k est un entier naturel non nul alors pour tout entier naturel n , on a : $F_{n+k} \equiv 2[F_n]$

3. En déduire que deux nombres de Fermat distincts sont premiers entre eux.

4. Retrouver alors qu'il existe une infinité de nombres premiers.

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » dit un proverbe. C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien