

Exercice 1

Déterminer l'entier naturel n dans chacun des cas ci-dessous

- a) $n - 4 / 6$
- b) $n - 3 / n + 3$
- c) $n + 1 / 3n - 4$
- d) $3n + 4 / 11n + 8$

Exercice 2

Soient a et b deux entiers tels que $a \wedge b = 1$

Montrer que

$$(a+b) \wedge a = 1 \text{ et } (a-b) \wedge b = 1$$

Exercice 3

Soit n un entier . montrer que :

$$(n^2 + n + 1) \wedge (n + 1) = 1$$

$$(7n + 2) \wedge (21n^2 + 16n + 3) = 1$$

$$(4n + 1) \wedge (4n - 1) = 1 \quad , \quad n \wedge (n^2 + 1) = 1$$

$$(7n + 2) \wedge (11n + 3) = 1$$

$$(2n + 3) \wedge (3n + 5) = 1$$

$$(2n^2 + 4n + 1) \wedge (n + 2) = 1$$

Exercice 4

- 1) soit a un entier relatif tel que $a \notin \{-1; 0; 1\}$

montrer que $a^4 + a^2 + 1$ n'est pas premier

- 2) a un entier différent de 1.

Montrer que $a^4 + 4$ n'est pas premier

Exercice 5

Résoudre dans \mathbb{N}^2 les systèmes :

$$1) \begin{cases} x \wedge y = 6 \\ xy = 432 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x \wedge y = 12 \\ x + y = 96 \end{cases}$$

Exercice 6

- 1) montrer que $(n^2 + 1) \wedge (n + 1) = (n + 1) \wedge 2$

2) déterminer $(n^2 + 1) \wedge (n + 1)$ suivant la parité du nombre n

- 3) déterminer n pour que

$$(n^2 + 1) \wedge (n + 1) = (n + 1)$$

Exercice 7

- 1) déterminer a et b de \mathbb{N}^* tels que $a \leq b$

$$\text{et } (a \vee b) - (a \wedge b) = 7$$

- 2) déterminer a et b de \mathbb{N}^* sachant que

$$2(a \vee b) - 7(a \wedge b) = 11$$

- 3) déterminer a et b de \mathbb{N}^* tels que $a \leq b$

$$\text{et } (a \vee b) - 3(a \wedge b) = 4$$

Exercice 8

1) On pose $a = pn$ et $b = (p - 1)n$: $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$. montrer que $a \wedge b = a - b$

2) montrer que si $a \wedge b = a - b$ alors

Il existe un couple (p, n) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que :

$$a = pn \text{ et } b = (p - 1)n$$

Exercice 9

Soient y ; x deux entiers de \mathbb{N}^* .

On considère les nombres

$$a = 40x(3y + 2) \quad , \quad b = 15x(8y + 5)$$

$$\text{et } c = 24x(5y + 3)$$

- 1) déterminer $a \wedge b$ et $b \wedge c$

- 2) montrer que $a \wedge b \wedge c = x$

Exercice 10

Soit a un entier naturel tel que $a \geq 2$

- 1) montrer que si $p | n$ alors $a^p - 1 | a^n - 1$

- 2) en déduire que $2^{2010} - 1$ est un multiple des nombres 3 ; 7 ; 31

Exercice 11

On considère dans \mathbb{Z}^2 l'équation

$$(E) \quad x^2 - y^2 + x - y = 12$$

- a) vérifier que $x - y$ et $x + y + 1$ ont des parités différentes

- b) résoudre dans \mathbb{Z}^2 l'équation (E)

Exercice 12

on considère dans \mathbb{Z}^2 l'équation

$$(E) \quad x^2 - y^2 - 6x - 63 = 0$$

- a) montrer que :

$$(E) \Leftrightarrow (x - y - 3)(x + y - 3) = 72$$

- b) déterminer les solutions de (E)

Exercice 13

p , n deux entiers de \mathbb{Z} .

On pose $x = 5n + 3p$ et $y = 3n + 2p$

- a) montrer que :

$$(d|x \text{ et } d|y) \Rightarrow (d|n \text{ et } d|p)$$

- b) montrer que $x \wedge y = p \wedge n$

Exercice 14

montrer que pour tout entier naturel n le nombre $5^{2n} + 3$ n'est pas divisible par 8