

Arithmétique

Exercice 1

- a) montrer que $(2n + 11) \wedge (n + 3) = (n + 3) \wedge 5$
 b) déduire les valeurs de $d = (2n + 11) \wedge (n + 3)$
 c) déterminer n pour que $(2n + 11) \wedge (n + 3) = 1$

Exercice 2

- a) montrer que :

$$(n^2 - 3n + 6) \wedge (n - 1) = (n - 1) \wedge 4$$

- b) déduire les valeurs de :

$$\delta = (n - 1) \wedge (n^2 - 3n + 6)$$

- c) déterminer n pour que :

$$(n - 1) \wedge (n^2 - 3n + 6) = 4$$

Exercice 3

Soient $c ; n$ deux entiers .

on pose $B = 2n + 1$; $A = 3n$

- 1) montrer que $n \wedge (2n + 1) = 1$

- 2) prouver que $(nc) \wedge (2n + 1) = c \wedge (2n + 1)$

- 3) déterminer suivant n le pgcd de A et B

Exercice 4

Soit k un entier relatif .

on pose $a = 2k - 1$, $b = 9k + 4$

- 1) montrer que $a \wedge b = a \wedge 17$

- 2) déterminer k pour que $a \wedge b = 17$

Exercice 5

Soit n un entier naturel .

- 1) vérifier que $n + 3 / 3n^3 - 11n + 48$

- 2) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 3n^2 - 9n + 16 \in \mathbb{N}^*$

- 3) a) démontrer que :

$$(\forall (a, b, c) \in \mathbb{N}^{*3}) \quad a \wedge b = (bc - a) \wedge b$$

- b) en déduire que :

$$(3n^3 - 11n) \wedge (n + 3) = (n + 3) \wedge 48$$

- 4) déterminer en extension l'ensemble

$$A = \left\{ n \in \mathbb{N}^* \mid \frac{3n^3 - 11n}{n + 3} \in \mathbb{N} \right\}$$

Exercice 6

soit n un élément de \mathbb{N}

- a) montrer que :

$$n + 1 \text{ divise } n^2 + 5n + 4 \text{ et } n^2 + 3n + 2$$

- b) déterminer n pour que :

$$(n + 1) / (3n^2 + 15n + 19)$$

- c) déduire que :

$$n^2 + 3n + 2 \text{ ne divise pas } (3n^2 + 15n + 19)$$

Exercice 7

Soient a et b deux entiers tels que $a \wedge b = 1$

Montrer que : $(3a + 4b) \wedge (4a + 5b) = 1$

Et $(4a + 15b) \wedge (3a + 11b) = 1$

Exercice 8

On considère dans \mathbb{Z}^2 l'équation :

$$(E) \quad 11x - 17y = 4$$

- 1) en utilisant l'algorithme d'Euclid déterminer une solution particulière de (E)

- 2) soit p un élément de \mathbb{Z}

montrer que $(17p + 5) \wedge (11p + 3) = (p + 1) \wedge 4$

- 3) soit (α, β) une solution de (E)

on pose $d = \alpha \wedge \beta$

- a) quelles sont les valeurs de d

- b) prouver que $4 | \alpha + \beta$

- 4) déterminer les couples (a, b) solutions de (E)

Tels que $a \wedge b = 4$