Exercice 1

Déterminer l'entier naturel n dans chacun des cas ci-dessous

a) $n-4/6$ b) $n-3/n+3$

c) $n+1/3n-4$ d) $3n+4/11n+8$

Exercice 2

Soient a et b deux entiers tels que $a\wedge b=1$

Montrer que

$(a+b)\wedge a=1$ et $(a-b)\wedge b=1$

Exercice 3

Soit n un entier . montrer que :

$$\left(n^2+n+1\right)\wedge(n+1)=1$$

$$(7n+2)\wedge\left(21n^2+16n+3\right)=1$$

$$(4n+1)\wedge(4n-1)=1 \quad ، \quad n\wedge\left(n^2+1\right)=1$$

$$(7n+2)\wedge(11n+3)=1$$

$$(2n+3)\wedge(3n+5)=1$$

$$\left(2n^2+4n+1\right)\wedge(n+2)=1$$

Exercice 4

1) soit a un entier relatif tel que $a\notin\{-1;0;1\}$

montrer que a^4+a^2+1 n'est pas premier

2) a un entier différent de 1.

Montrer que a^4+4 n'est pas premier

Exercice 5

Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ les systèmes :

1) $\begin{cases} x\wedge y=6 \\ xy=432 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x\wedge y=12 \\ x+y=96 \end{cases}$

Exercice 6

1) montrer que $\left(n^2+1\right)\wedge(n+1)=(n+1)\wedge 2$

2) déterminer $\left(n^2+1\right)\wedge(n+1)$ suivant la parité du nombre n

3) déterminer n pour que

$\left(n^2+1\right)\wedge(n+1)=(n+1)$

Exercice 7

1) déterminer a et b de $\mathbb{N}^*$ tels que $a\leq b$ et $(a\vee b)-(a\wedge b)=7$

2) déterminer a et b de $\mathbb{N}^*$ sachant que $2(a\vee b)-7(a\wedge b)=11$

3) déterminer a et b de $\mathbb{N}^*$ tels que $a\leq b$ et $(a\vee b)-3(a\wedge b)=4$

Exercice 8

1) On pose $a=pn$ et $b=(p-1)n$: $p\in\mathbb{N}^*$ et $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$. montrer que $a\wedge b=a-b$

2) montrer que si $a\wedge b=a-b$ alors

Il existe un couple (p,n) de $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ tel que :

$a=pn$ et $b=(p-1)n$

Exercice 9

Soients y ; x deux entiers de $\mathbb{N}^*$.

On considère les nombres

$a=40x(3y+2)$ ، $b=15x(8y+5)$

et $c=24x(5y+3)$

1) déterminer $a\wedge b$ et $b\wedge c$

2) montrer que $a\wedge b\wedge c=x$

Exercice 10

Soit a un entier naturel tel que $a\geq 2$

1) montrer que si $p|n$ alors $a^p-1|a^n-1$

2) en déduire que $2^{2010}-1$ est un multiple des nombres 3 ; 7 ; 31

Exercice 11

On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation

(E) $x^2-y^2+x-y=12$

a) vérifier que $x-y$ et $x+y+1$ ont des parités différentes

b) résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E)

Exercice 12

on considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation

(E) $x^2-y^2-6x-63=0$

a) montrer que :

$(E)\Leftrightarrow(x-y-3)(x+y-3)=72$

b) déterminer les solutions de (E)

Exercice 13

p , n deux entiers de $\mathbb{Z}$.

On pose $x=5n+3p$ et $y=3n+2p$

a) montrer que :

$(d|x \text{ et } d|y) \Rightarrow (d|n \text{ et } d|p)$

b) montrer que $x\wedge y=p\wedge n$

Exercice 14

montrer que pour tout entier naturel n le nombre $5^{2n}+3$ n'est pas divisible par 8