



Exercices avec solutions

Exercice01 : 1) Déterminer et dénombrer les diviseurs naturels de 156

12) Déterminer dans \mathbb{Z} tous les diviseurs de -8

Solution01 : 1) 156 a 12 diviseurs :

1; 2; 3; 4; 6; 12; 13; 26; 39; 52; 78 et 156.

156 et 1 sont appelés diviseurs triviaux, les autres sont des diviseurs stricts.

2) $D_{-8} = \{-8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8\}$

Exercice02 :

1) $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$ et $c \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{Z}$ et $y \in \mathbb{Z}$

a) montrer que si $a \nmid 2b+c$ et $a \nmid b+c$ alors $a \nmid c$

b) montrer que si $a \nmid 2b+3c$ et $a \nmid b+c$ alors $a \nmid c$

c) montrer que si $a \nmid x-y$ et $a \nmid b-c$ alors $a \nmid xb-cy$

2) $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ et $a \nmid 12n+1$ et $a \nmid -2n+3$

Montrer que $a \nmid 19$

3) $d \in \mathbb{Z}$ et $a \in \mathbb{Z}$ et $d \nmid n^2+3$ et $d \nmid 2n-1$

Montrer que $d \nmid 13$

Solution02 : 1) a)

$$\begin{cases} a \nmid 2b+c \\ a \nmid b+c \end{cases} \Rightarrow a \nmid 2(b+c) - (2b+c) \Rightarrow a \nmid c$$

$$1) b) \begin{cases} a \nmid 2b+3c \\ a \nmid b+c \end{cases} \Rightarrow a \nmid 2b+3c - 2(b+c) \Rightarrow a \nmid c$$

$$1) c) \begin{cases} a \nmid x-y \\ a \nmid b-c \end{cases} \Rightarrow a \nmid bx-by \text{ et } a \nmid by-cy \Rightarrow a \nmid bx-cy$$

2) $a \nmid 12n+1$ et $a \nmid -2n+3$

$$\Rightarrow a \nmid 12n+1 \text{ et } a \nmid -12n+18 \Rightarrow a \nmid 19$$

$$\Rightarrow a \in \{\pm 1; \pm 19\}$$

$$\begin{aligned} 3) d \in \mathbb{Z} \text{ et } a \in \mathbb{Z} \text{ et } d \nmid n^2+3 \text{ et } d \nmid 2n-1 \\ \Rightarrow d \nmid n^2+3 \text{ et } a \nmid (2n-1)^2 \Rightarrow d \nmid 4n^2+12 \text{ et } d \nmid 4n^2-4n+1 \\ \Rightarrow d \nmid 11+4n \text{ et } d \nmid -2+4n \Rightarrow d \nmid 13 \end{aligned}$$

Exercice03 : $a \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{Z}$

$$\text{Montrer que : } \begin{cases} a \nmid 5x-7 \\ a \nmid 2x+3 \end{cases} \Rightarrow a \nmid 29$$

$$\text{Solution03 : } \begin{cases} a \nmid 5x-7 \\ a \nmid 2x+3 \end{cases} \Rightarrow a \nmid 2(5x-7) - 5(2x+3)$$

$$a \nmid 10x-14 - 10x-15 \Rightarrow a \nmid -29 \Rightarrow a \nmid 29$$

Exercice04 : Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$:

3 divise $4^n - 1$

Solution04 :

Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists k \in \mathbb{N} / 4^n - 1 = 3k$

1étapes : l'initialisation : Pour $n=0$ nous avons

$4^0 - 1 = 0$ est un multiple de 3

Donc $P(0)$ est vraie.

2étapes : d'hérédité : Supposons que $P(n)$ soit vraie c'est-à-dire : $\exists k \in \mathbb{N} / 4^n - 1 = 3k$ donc $4^n = 3k + 1$

3étapes : Nous allons montrer que $P(n+1)$ est vraie. Montrons alors que :

$$\exists k' \in \mathbb{N} / 4^{n+1} - 1 = 3k' ??$$

$$4^{n+1} - 1 = 4 \times 4^n - 1$$

$$= 4 \times (3k+1) - 1 = 12k + 4 - 1 = 12k + 3 = 3(4k+1)$$

$$\text{avec } k' = 4k + 1$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a :

$\forall n \in \mathbb{N} ; 4^n - 1$ est divisible par 9

Exercice05 : Quelles sont les valeurs de l'entier relatif n pour lesquelles : $n+2/3n+1$

Solution05 : $n+2/3n+1$ et $n+2/2n+2$

$n+2/3n+1$ et $n+2/3n+6$ donc

$n+2/(3n+6) - (3n+1)$ donc $n+2/5$

Les diviseurs de 5 sont 1 ; -1 ; 5 ; -5

Il faut que $n+2 \in \{-1; -5; 1; 5\}$ ce qui entraîne que $n \in \{-3; -7; -1; 3\}$

On vérifie que que que si $n \in \{-3; -7; -1; 3\}$ alors $n+2/3n+1$ avant de conclure.

Conclusion : les valeurs de l'entier relatif n pour lesquelles : $n+2/3n+1$ sont : -7 ; -3 ; -1 ; 3

Exercice 06 : Quelles sont les valeurs de l'entier relatif n pour lesquelles la fraction $\frac{3n+8}{n+4}$

Représente un entier relatif ?

Solution06 : Cette fraction a un sens si : $n+4 \neq 0$, soit $n \neq -4$

On constate que $3n+8 = 3(n+4) - 4$

$n+4$ divise $3(n+4)$, donc $n+4$ divise $3n+8$ si $n+4$ divise -4 .

Les diviseurs de -4 sont $1 ; -1 ; 2 ; -2 ; 4 ; -4$.

Il faut que $n+4 \in \{-4; -2; -1; 1; 2; 4\}$ ce qui entraîne que $n \in \{-8; -6; -5; -3; -2; 0\}$

On vérifie que -4 n'appartient pas à $-8 ; -6 ; -5 ; -3 ; -2 ; 0$ avant de conclure.

Conclusion : la fraction $\frac{3n+8}{n+4}$ représente un entier relatif pour les valeurs de l'entier relatif $n : -8 ; -6 ; -5 ; -3 ; -2 ; 0$.

Exercice07 : Résoudre dans \mathbb{N}^2 les équations suivantes : a) $x^2 - y^2 = 32$ avec $x > y$

b) $2xy + 2x + y = 99$

Solution07 : a) $x^2 - y^2 = 32 \Leftrightarrow (x-y)(x+y) = 32$

$x-y$ et $x+y$ sont des diviseurs positif de 32

Et $(x-y) + (x+y) = 2x$ est un nombre pair

Donc $x-y$ et $x+y$ ont la même parité $32 = 2^5$

On dresse un tableau :

$x-y$	2	4
$x+y$	16	8
x	9	6
y	7	2

$$S = \{(6; 2); (9; 7)\}$$

$$\text{b) } 2xy + 2x + y = 99 \Leftrightarrow 2xy + y + 2x + 1 - 1 = 99$$

$$\Leftrightarrow y(2x+1) + 2x + 1 = 99 + 1 \Leftrightarrow (2x+1)(y+1) = 100$$

Donc : $2x+1$ et $y+1$ sont des diviseurs positif de 100

$$D_{100} = \{1; 2; 4; 5; 10; 20; 25; 50; 100\}$$

$2x+1$	1	2	4	5	20	25	50	100
$y+1$	100	50	25	20	5	4	2	1
x	0			2		12		
y	99			10		3		

$$S = \{(0; 99); (2; 19); (12; 3)\}$$

Exercice08 : Déterminer les restes dans la division par 9 des nombres suivants : 23451^{100} ; 100^{23451} ; $23451^{100} + 100^{23451}$

Solution08 : On a : $23451 = 3908 \times 9 + 6$

donc : $23451 \equiv 6[9]$

donc : $23451 \equiv 6^{100}[9]$

et on a : $6 = 6[9]$ donc $6^2 = 36[9] \Leftrightarrow 6^2 = 0[9]$

donc : $(6^2)^{50} = 0[9]$ donc : $6^{100} = 0[9]$

donc : $23451^{100} = 0[9]$ (1)

donc le reste dans la division du nombre 23451^{100} par 9 est : 0 (cad 23451^{100} est divisible par 9 ou on dit que 9 divise 23451^{100})

de même on a : $100 = 11 \times 9 + 1$ donc : $100 \equiv 1[9]$

$\Rightarrow 100^{23451} = 1^{23451}[9] \Rightarrow 100^{23451} = 1[9]$ (2)

De (1) et (2) on déduit que :

$23451^{100} + 100^{23451} = 0 + 1[9]$ car la congruence est compatible avec l'addition

Donc : $23451^{100} + 100^{23451} = 1[9]$

Par suite : le reste dans la division du nombre $23451^{100} + 100^{23451}$ par 9 est : 1

Exercice09 : 1) Montrer que : $5^8 \equiv -1[17]$

2) Déterminer les restes dans la division par 17 des nombres suivants : 5^{16} ; 5^{500} .

Solution09 : 1) On a : $5^1 \equiv 5[17]$ donc

$5^2 \equiv 25[17] \Leftrightarrow 5^2 \equiv 8[17]$

$5^4 \equiv 8^2[17] \Leftrightarrow 5^4 \equiv 13[17]$

$5^8 \equiv 13^2[17] \Leftrightarrow 5^8 \equiv 169[17] \Leftrightarrow 5^8 \equiv 16[17] \Leftrightarrow 5^8 \equiv -1[17]$

2)) On a : $5^8 \equiv -1[17]$ donc

$(5^8)^2 \equiv (-1)^2[17] \Leftrightarrow 5^{16} \equiv 1[17]$

Par suite : le reste dans la division du nombre 5^{16} par 17 est : 1

On a : $500 = 31 \times 16 + 4$

Donc : $5^{500} \equiv 5^{31 \times 16 + 4}[17] \Leftrightarrow 5^{500} \equiv (5^{16})^{31} \times 5^4[17]$

$\Leftrightarrow 5^{500} \equiv 1^{31} \times 5^4[17] \Leftrightarrow 5^{500} \equiv 5^4[17] \Leftrightarrow 5^{500} \equiv 13[17]$

Par suite : le reste dans la division du nombre 5^{500} par 17 est : 13

Exercice10 : $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$ Si 17 est le reste de la division euclidienne de a par 19

Et Si 15 est le reste de la division euclidienne de b par 19 Déterminer le reste de la division euclidienne des nombres suivants par 19 :

1) $a+b$ 2) $a^2 + b^2$ 3) $2a - 5b$

Solution10 : 1) On a : $a \equiv 17[19]$ et $b \equiv 15[19]$

donc : $a+b \equiv 17+15[19] \Leftrightarrow a+b \equiv 13[19]$

Par suite : le reste dans la division du nombre $a+b$ par 19 est : 13

2) $a \equiv 17[19] \Rightarrow a^2 \equiv 17^2[19] \Rightarrow a^2 \equiv 4[19]$

$b \equiv 15[19] \Rightarrow b^2 \equiv 15^2[19] \Rightarrow b^2 \equiv 16[19]$

Donc : $a^2 + b^2 \equiv 4 + 16[19] \Rightarrow a^2 + b^2 \equiv 1[19]$

Par suite : le reste dans la division du nombre $a^2 + b^2$ Par 19 est : 1

3) $a \equiv 17[19] \Rightarrow 2a \equiv 2 \times 17[19] \Rightarrow 2a \equiv 15[19] \text{ (1)}$

$b \equiv 15[19] \Rightarrow 5b \equiv 5 \times 15[19] \Rightarrow 5b \equiv 18[19]$

Donc : $5b \equiv -1[19] \Rightarrow -5b \equiv 1[19] \text{ (2)}$

De (1) et (2) on déduit que :

$2a - 5b \equiv 15 + 1[19] \Rightarrow 2a - 5b \equiv 16[19]$

Par suite : le reste dans la division du nombre $2a - 5b$ Par 19 est : 16

Exercice11 : Déterminer le reste de la division du nombres 3^{2007} par 2 et par 13

Solution11 : 1) On a : $3 \equiv 1[2]$ donc $3^{2007} \equiv 1[2]$

Par suite : le reste dans la division du nombre 3^{2007} Par 2 est : 1

2) On a : $3 \equiv 3[13]$ donc

$3^2 \equiv 9[13] \Rightarrow 3^3 \equiv 27[13] \Rightarrow 3^3 \equiv 1[13]$

Et on a : $2007 = 3 \times 669$ donc :

$(3^3)^{669} \equiv 1^{669}[13] \Rightarrow 3^{2007} \equiv 1[13]$

Par suite : le reste dans la division du nombre 3^{2007} Par 13 est : 1

Exercice12 : Déterminer le reste de la division du nombres 73^{2019} par 7

Solution12 : On a : $73 \equiv 3[7]$ donc $73^{2019} \equiv 3^{2019}[7]$

$3^{2019} = 3^{2018+1} = 3^{2 \times 1009+1} = (3^2)^{1009} \times 3^1$

On a : $3^2 \equiv 2[7]$ donc : $(3^2)^{1009} \equiv 2^{1009}[7]$

donc : $3^{2019} \equiv 2^{1009} \times 3[7]$

on a : $1009 = 336 \times 3 + 1$

donc : $2^{1009} = (2^3)^{336} \times 2$ et on a : $2^3 \equiv 1[7]$

donc : $(2^3)^{336} \times 2 \equiv 2[7]$ par suite : $73^{2019} \equiv 6[7]$

Par suite : le reste dans la division du nombre 73^{2019} Par 7 est : 6

Exercice13 : Déterminer le reste de la division du nombres $19^{52} \times 23^{41}$ par 7

Solution13 : On a : $19 \equiv 5[7]$ donc $19^2 \equiv 4[7]$

donc $19^4 \equiv 2[7]$ et on a $52 = 13 \times 4$ donc :

$19^{52} \equiv 2^{13}[7]$

On a : $23 \equiv 2[7]$ donc $23^{41} \equiv 2^{41}[7]$

$19^{52} \times 23^{41} \equiv 2^{54}[7] (542 = 3 \times 18)$

On a : $2^3 \equiv 1[7] \Rightarrow 2^{54} \equiv 1[7]$

donc : $19^{52} \times 23^{41} \equiv 1[7]$

Par suite : le reste dans la division du nombre $19^{52} \times 23^{41}$ Par 7 est : 1

Exercice14 : Déterminer le reste de la division par 5 du nombres $22^{33} + 33^{22}$

Solution14 : On a : $22 \equiv 2[5]$ donc $22^{33} \equiv 2^{33}[5]$

Et on a : $33 \equiv -2[5]$ donc $33^{22} \equiv 2^{22}[5]$

donc $22^{33} + 33^{22} \equiv 2^{33} + 2^{22}[5]$

et on a $2^4 \equiv 1[5]$ et $33 = 8 \times 4 + 1$ donc :

$2^{33} = 2^{8 \times 4 + 1} = (2^4)^8 \times 2^1$ donc $2^{33} \equiv 2[5]$

on a $2^{22} = (2^2)^{11}$ et $2^2 \equiv -1[5]$ donc $2^{22} \equiv -1[5]$

donc $22^{33} + 33^{22} \equiv 2 - 1[5]$

donc : $22^{33} + 33^{22} \equiv 1[5]$

Par suite : le reste dans la division du nombre $22^{33} + 33^{22}$ Par 5 est : 1

Exercice15: Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$ 3 divise $4^n - 1$

Solution15 : Méthode1

Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N} \exists k \in \mathbb{N} / 4^n - 1 = 3k$

1étapes : l'initialisation : Pour $n=0$ nous avons $4^0 - 1 = 0$ est un multiple de 3

Donc $P(0)$ est vraie.

2étapes : d'hérédité : Supposons que $P(n)$ soit vraie c'est-à-dire : $\exists k \in \mathbb{N} / 4^n - 1 = 3k$ donc $4^n = 3k + 1$

3étapes : Nous allons montrer que $P(n+1)$ est vraie. Montrons alors que :

$\exists k' \in \mathbb{N} / 4^{n+1} - 1 = 3k' ??$

$4^{n+1} - 1 = 4 \times 4^n - 1$

$= 4 \times (3k + 1) - 1 = 12k + 4 - 1 = 12k + 3 = 3(4k + 1)$

avec $k' = 4k + 1$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a :

$\forall n \in \mathbb{N} ; 4^n - 1$ est divisible par 9

Méthode2

Il suffit de montrer que : $4^n - 1 \equiv 0[3] ??$

On a : $4 \equiv 1[3]$ donc $4^n \equiv 1[3]$

Donc : $4^n - 1 \equiv 0[3]$ Cqfd

Exercice16 : 1) Déterminer et discuter suivants les valeurs de l'entier naturel n le reste de la division par 7 du nombres 3^n

2)en déduire le reste de la division par 7 du nombres 2019^{2019}

Solution19 : 1) $3^n \equiv r[7]$ et $r \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

On a : $3^0 \equiv 1[7]$ et $3^1 \equiv 3[7]$ et $3^2 \equiv 2[7]$
 et $3^3 \equiv 6[7]$ et $3^4 \equiv 4[7]$ et $3^5 \equiv 5[7]$ et $3^6 \equiv 1[7]$
 Si $n \in \mathbb{N}$ alors : $n = 6k + r$ avec $r \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$
 On a : $3^6 \equiv 1[7]$ donc : $(3^6)^k \equiv 1^k[7]$
 donc : $3^{6k} \equiv 1[7]$ et $3^{6k+1} \equiv 3[7]$ et $3^{6k+2} \equiv 2[7]$
 et $3^{6k+3} \equiv 6[7]$ et $3^{6k+4} \equiv 4[7]$ et $3^{6k+5} \equiv 5[7]$

Exercice17: Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$: 1) $\bar{2}x = \bar{3}$ 2) $x^2 + \bar{3}x = \bar{0}$
 3) $\bar{2}013x^3 + \bar{2}x = \bar{k}$

Solution10 : On a : $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{\bar{0}; \bar{1}; \bar{2}; \bar{3}\}$

1) On Dresse une table comme suite :

x	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{2}x$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$

Et en utilisant cette une table on déduit que
 Cette équation n'admet pas de solutions Donc : $S = \emptyset$
 1) On Dresse une table comme suite :

x	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
x^2	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}x$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$
$x^2 + \bar{3}x$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$

Et en utilisant cette une table on déduit que :
 $\bar{0}$ et $\bar{1}$ sont solutions de l'équation Donc : $S = \{\bar{0}; \bar{1}\}$

2) $\bar{2}013x^3 + \bar{2}x = \bar{k} \Leftrightarrow \bar{1}x^3 + \bar{2}x = \bar{k} \Leftrightarrow x^3 + \bar{2}x = \bar{k}$

Car : $2013 = 503 \times 4 + 1$

On Dresse une table comme suite :

x	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
x^3	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{2}x$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$x^3 + \bar{2}x$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

Si $\bar{k} = \bar{0}$: $S = \{\bar{0}; \bar{2}\}$ Si $\bar{k} = \bar{1}$: $S = \{\bar{3}\}$

Si $\bar{k} = \bar{2}$: $S = \emptyset$ Si $\bar{k} = \bar{3}$: $S = \{\bar{1}\}$

Exercice18 : Résoudre dans $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$ l'équations suivants : $x + \bar{3}y = \bar{1}$

Solution18 : on Dresse une table des opérations de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{\bar{0}; \bar{1}; \bar{2}; \bar{3}; \bar{4}\}$ Comme suite

	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$

$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$
-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------

$$S = \{(\bar{0}; \bar{2}); (\bar{1}; \bar{0}); (\bar{2}; \bar{3}); (\bar{3}; \bar{1}); (\bar{4}; \bar{3}); (\bar{4}; \bar{4})\}$$

Exercice19 : Résoudre dans $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$ les système suivants : $\begin{cases} \bar{3}x + \bar{2}y = \bar{1} \\ \bar{2}x + \bar{4}y = \bar{3} \end{cases}$

Solution19 :

$$\begin{cases} \bar{3}x + \bar{2}y = \bar{1} \\ \bar{2}x + \bar{4}y = \bar{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\bar{3} + \bar{2})x + (\bar{2} + \bar{4})y = \bar{3} + \bar{1} \\ \bar{2}x + \bar{4}y = \bar{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \bar{4} \\ \bar{2}x + \bar{4}y = \bar{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \bar{1} \\ y = \bar{4} \end{cases} \text{ donc } S = \{(\bar{1}; \bar{4})\}$$

Exercice20 : 1) Déterminer et discuter suivants les valeurs de l'entier naturel n le reste de la division par 10 du nombres 3^n

2) en déduire le chiffre des unités du nombres 2019^{2020}

3) Déterminer les valeurs de l'entier naturel n tel que : $3^n + 5n + 2 \equiv 0[10]$

Solution20 : 1) $3^n \equiv r[10]$ et $r \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$

On a : $3^0 \equiv 1[10]$ et $3^1 \equiv 3[10]$ et $3^2 \equiv 9[10]$

et $3^3 \equiv 7[10]$ et $3^4 \equiv 1[10]$

Si $n \in \mathbb{N}$ alors : $n = 4k + r$ avec $r \in \{0; 1; 2; 3\}$

On a : $3^4 \equiv 1[10]$ donc : $(3^4)^k \equiv 1^k[10]$

donc : $3^{4k} \equiv 1[10]$ et $3^{4k+1} \equiv 3[10]$ et $3^{4k+2} \equiv 9[10]$

et $3^{4k+3} \equiv 7[10]$

2) le chiffre des unités du nombres 2019^{2020} est le reste dans la division du nombre 2019^{2020} Par 10
 cad : on cherche r tel que : $2019^{2020} \equiv r[10]$??

On a : $2019 = 2010 + 9$ donc : $2019 \equiv 9[10]$

donc : $2019^{2020} \equiv 9^{2020}[10]$ donc : $2019^{2020} \equiv 3^{4040}[10]$

or : $4040 = 4 \times 1010 = 4 \times k$

donc : $2019^{2020} \equiv 3^{4k}[10]$ donc : $2019^{2020} \equiv 1[10]$

le chiffre des unités du nombres 2019^{2020} est 1

Autre méthode : $2019 \equiv 9[10]$

donc : $2019 \equiv -1[10]$ donc : $2019^{2020} \equiv 1[10]$

3) On Dresse une table comme suite :

n	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$
3^n	$\equiv 1[10]$	$\equiv 3[10]$	$\equiv 9[10]$	$\equiv 7[10]$
$5n$	$\equiv 0[10]$	$\equiv 5[10]$	$\equiv 0[10]$	$\equiv 5[10]$
$3^n + 5n + 2$	$\equiv 3[10]$	$\equiv 0[10]$	$\equiv 1[10]$	$\equiv 4[10]$

donc : $3^n + 5n + 2 \equiv 0 \pmod{10} \Leftrightarrow n = 3k + 1$ avec $k \in \mathbb{N}$

Exercice21 : Déterminer le chiffre des unités du nombres 24537^{2018}

Solution21 : On a : $24537 \equiv 7 \pmod{10}$ donc :

$24537^{2018} \equiv 7^{2018} \pmod{10}$ or : $7^2 \equiv -1 \pmod{10}$ donc :

$$(7^2)^{1009} \equiv (-1)^{1009} \pmod{10} \equiv -1 \pmod{10}$$

Donc : $24537^{2018} \equiv -1 \pmod{10}$ donc : $24537^{2018} \equiv 9 \pmod{10}$

Donc : des unités du nombres 24537^{2018} est 9

Exercice22 : Déterminer tous les entiers naturels n tel que : $2^n \equiv n^2 \pmod{9}$

Solution22 : on Dresse une table des opérations

de $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z} = \{\bar{0}; \bar{1}; \bar{2}; \bar{3}; \bar{4}; \bar{5}; \bar{6}; \bar{7}; \bar{8}\}$ Comme suite

\bar{n}	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$
2^n	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{7}$	$\bar{5}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
n^2	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$

$2^n \equiv n^2 \pmod{9} \Leftrightarrow \bar{n} = \bar{2}$ ou $\bar{n} = \bar{4}$

$2^n \equiv n^2 \pmod{9} \Leftrightarrow n = 2 + 9k$ ou $n = 4 + 9k$ avec $k \in \mathbb{N}$

Exercice23 : Résoudre dans \mathbb{N} l'équations suivante : $3^n + 5n + 1 \equiv 0 \pmod{8}$

Solution23 : méthode1 :

on Dresse une table des opérations de

$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} = \{\bar{0}; \bar{1}; \bar{2}; \bar{3}; \bar{4}; \bar{5}; \bar{6}; \bar{7}\}$ Comme suite

On a : $3^0 \equiv 1 \pmod{8}$ et $3^1 \equiv 3 \pmod{8}$ et $3^2 \equiv 1 \pmod{8}$

donc : $3^{2k} \equiv 1 \pmod{8}$ et $3^{2k+1} \equiv 3 \pmod{8}$

n	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$
3^n	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{5n+1}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{7}$	$\bar{4}$
U_n	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$

$3^n + 5n + 1 \equiv 0 \pmod{8} \Leftrightarrow \bar{n} = \bar{6}$

$3^n + 5n + 1 \equiv 0 \pmod{8} \Leftrightarrow n = 6 + 8k$ avec $k \in \mathbb{N}$

Exercice24 : Quel est le reste de la division du nombre $22^{33} \times 33^{22}$ par 5?

Solution24 : On a : $22 \equiv 2 \pmod{5}$ donc $22^{33} \equiv 2^{33} \pmod{5}$

Et on a : $33 \equiv -2 \pmod{5}$ donc $33^{22} \equiv 2^{22} \pmod{5}$

donc $22^{33} \times 33^{22} \equiv 2^{33} \times 2^{22} \pmod{5}$ donc $22^{33} \times 33^{22} \equiv 2^{55} \pmod{5}$

et on a $2^4 \equiv 1 \pmod{5}$ et $55 = 13 \times 4 + 3$ donc :

$$2^{55} = 2^{13 \times 4 + 3} = (2^4)^{13} \times 2^3 \text{ donc } 2^{55} \equiv 8 \pmod{5}$$

$2^{55} \equiv 3 \pmod{5}$ Par suite : le reste dans la division du nombre $22^{33} \times 33^{22}$ par 5 est : 3

Exercice25 : Quel est le reste de la division du

nombre 3^{2019} par 2 et par 13?

Solution25 : 1) On a : $3 \equiv 1 \pmod{2}$ donc $3^{2019} \equiv 1 \pmod{2}$

Par suite : le reste dans la division du nombre 3^{2019} par 2 est : 1

2) On a : $3 \equiv 3 \pmod{13}$ donc

$$3^2 \equiv 9 \pmod{13} \Rightarrow 3^3 \equiv 27 \pmod{13} \Rightarrow 3^3 \equiv 1 \pmod{13}$$

Et on a : $2019 = 3 \times 673$ donc :

$$(3^3)^{673} \equiv 1^{673} \pmod{13} \Rightarrow 3^{2019} \equiv 1 \pmod{13}$$

Par suite : le reste dans la division du nombre 3^{2019} par 13 est : 1

Exercice26 : 1) montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$2^{2n} + 6n - 1$$

Est divisible par 9

2) En déduire que : $4^n \equiv 3n + 1 \pmod{9}$

Solution26 : 1) Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\exists k \in \mathbb{N} / 2^{2n} + 6n - 1 = 9k$$

1étapes : l'initialisation : Pour $n=1$ nous avons

$$2^{2 \times 1} + 6 \times 1 - 1 = 9 \text{ est un multiple de 9}$$

Donc P (1) est vraie.

2étapes : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $\exists k \in \mathbb{N} / 2^{2n} + 6n - 1 = 9k$ donc $2^{2n} = 9k - 6n + 1$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie. Montrons alors que :

$$\exists k' \in \mathbb{N} / 2^{2n+2} + 6(n+1) - 1 = 9k' ??$$

$$2^{2n+2} + 6(n+1) - 1 = 2^{2n} \times 2^2 + 6n + 6 - 1$$

$$= (9k - 6n + 1) \times 4 + 6n + 5 = 9 \times 4k - 24n + 4 + 6n + 5$$

$$= 9 \times 4k - 18n + 9 = 9 \times (4k - 2n + 1) = 9 \times k'$$

avec $k' = 4k - 2n + 1$ donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a :

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 2^{2n} + 6n - 1$ Est divisible par 9

2) on a : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 9 \nmid 2^{2n} + 6n - 1$

Donc : $2^{2n} + 6n - 1 \equiv 0 \pmod{9}$ Donc : $(2^2)^n \equiv -6n + 1 \pmod{9}$

et on a : $0 \equiv 9n \pmod{9}$ donc : $4^n \equiv 3n + 1 \pmod{9}$

Exercice27 : Quel est le reste de la division du nombre $1653^{351} + 43^{137}$ par 11?

Solution27 : On a : $1653 = 150 \times 11 + 3$

$$1653 \equiv 3 \pmod{11} \text{ et } 43 \equiv -1 \pmod{11} \text{ donc } (1653)^{351} \equiv 3^{351} \pmod{11}$$

$$43^{137} \equiv (-1)^{137} \pmod{11} \text{ donc } 43^{137} \equiv -1 \pmod{11}$$

On a : $351 = 70 \times 5 + 1$

$$\text{donc } (1653)^{351} \equiv 3^{351} \pmod{11} \equiv (3^5)^{70} \times 3 \pmod{11} \equiv 1 \times 3 \pmod{11} \equiv 3 \pmod{11}$$

$$\text{donc } 1653^{351} + 43^{137} \equiv 2 \pmod{11}$$

Par suite : le reste dans la division du nombre $1653^{351} + 43^{137}$ Par 11 est : 2

Exercice28: $n \in \mathbb{N}$ on pose $U_n = 4^n - 3n - 1$

- 1) montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} = 4U_n + 9n$
- 2) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N} \quad 9$ divise $4^n - 3n - 1$

Solution28 :

$$1) \quad U_{n+1} = 4^{n+1} - 3(n+1) - 1 = 4^n \times 4 - 3n - 4$$

$$\text{Or : } U_n = 4^n - 3n - 1 \Leftrightarrow U_n + 3n + 1 = 4^n$$

$$\text{Donc : } U_{n+1} = (U_n + 3n + 1) \times 4 - 3n - 4 = 4U_n + 12n + 4 - 3n - 4$$

$$U_{n+1} = 4U_n + 9n$$

2) (réurrence)

1étapes : Pour $n=0$ nous avons $\frac{9}{0}$

Donc $P(0)$ est vraie.

2étapes : Supposons que $P(n)$ soit vraie c'est-à-dire : $\frac{9}{4^n - 3n - 1}$ donc $\frac{9}{U_n}$

3étapes : Montrons que : $\frac{9}{U_{n+1}}$??

On a $\frac{9}{U_n}$ et $\frac{9}{9}$ donc $\frac{9}{4U_n + 9n}$ donc $\frac{9}{U_{n+1}}$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a :

$\forall n \in \mathbb{N} \quad 9$ divise $4^n - 3n - 1$

Exercice29 : montrer que

$$\frac{7}{1^{2019} + 2^{2019} + 3^{2019} + 4^{2019} + 5^{2019} + 6^{2019}}$$

Solution29 : on a : $4 \equiv -3[7]$ et $5 \equiv -2[7]$ et

$6 \equiv -1[7]$ donc : $4^{2019} \equiv -3^{2019}[7]$ et $5^{2019} \equiv -2^{2019}[7]$

et $6^{2019} \equiv -1^{2019}[7]$

donc : $1^{2019} + 2^{2019} + 3^{2019} + 4^{2019} + 5^{2019} + 6^{2019} \equiv 1 + (-1)[7]$

Donc : $1^{2019} + 2^{2019} + 3^{2019} + 4^{2019} + 5^{2019} + 6^{2019} \equiv 0[7]$

Exercice30 : $n \in \mathbb{N}$ on pose $\alpha_n = n^4 - n^2 + 16$

1) montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad n^2 + 3n + 4$ et $n^2 - 3n + 4$

Sont des nombres pairs

2) En déduire que $\alpha_n = n^4 - n^2 + 16$ n'est pas premier

Solution30 : 1) soit $n \in \mathbb{Z} \quad n^2 - 3n + 4 \equiv n^2 - n[2]$

donc $n^2 - 3n + 4 \equiv n(n-1)[2]$ or $n(n-1)$ est le produit de deux nombres consécutifs donc paire donc $n(n-1) \equiv 0[2]$ donc $n^2 - 3n + 4 \equiv 0[2]$

donc $n^2 - 3n + 4$ est un nombre paire

et on a : $n^2 + 3n + 4 \equiv n^2 + n[2]$ donc

$$n^2 + 3n + 4 \equiv n(n+1)[2]$$

Or $n(n+1)$ est le produit de deux nombres

consécutifs donc paire

$$\text{donc } n(n+1) \equiv 0[2] \text{ donc } n^2 + 3n + 4 \equiv 0[2]$$

donc $n^2 + 3n + 4$ est un nombre paire

$$2) \quad \alpha_n = n^4 - n^2 + 16 = (n^2 + 4)^2 - 9n^2 = (n^2 - 3n + 4)(n^2 + 3n + 4)$$

Et puisque $n^2 - 3n + 4$ et $n^2 + 3n + 4$ sont des nombres paire

alors : $n^2 - 3n + 4 \neq 1$ et $n^2 + 3n + 4 \neq 1$

donc α_n n'est pas un nombre premier

Exercice31 : montrer que $\forall a \in \mathbb{Z} \quad a \wedge (a+1) = 1$

Solution31 : on pose $d = a \wedge (a+1)$

$$\Rightarrow \frac{d}{a} \text{ et } \frac{d}{a+1} \Rightarrow \frac{d}{1} \Rightarrow d = 1$$

Exercice32 : $n \in \mathbb{N}$ On considère les deux

nombres : $A = n^2 + 3$ et $B = n+2$

1) montrer que $A \wedge B = (n+2) \wedge 7$

2) déterminer l'entier naturel n tel que : $\frac{n^2 + 3}{n+2} \in \mathbb{N}$

Solution32 : 1) on pose $d = A \wedge B$ et

$$d' = (n+2) \wedge 7$$

On a : $d = A \wedge B$

$$\Rightarrow \frac{d}{A} \text{ et } \frac{d}{B} \Rightarrow \frac{d}{n^2 + 3} \text{ et } \frac{d}{n+2}$$

$\Rightarrow \frac{d}{n^2 + 3} \text{ et } \frac{d}{n+2}$ on utilisant la division

euclidienne : on trouve : $n^2 + 3 = (n+2)(n-2) + 7$

$$n^2 + 3 - (n+2)(n-2) = 7$$

$$\Rightarrow \frac{d}{n^2 + 3 - (n+2)(n-2)}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{7} \text{ et } \frac{d}{n+2} \Rightarrow \frac{d}{(n+2) \wedge 7} \Rightarrow \frac{d}{d'}$$

Inversement : On a : $d' = (n+2) \wedge 7$

$$\Rightarrow \frac{d'}{n+2} \text{ et } \frac{d'}{7} \Rightarrow \frac{d'}{(n+2)(n-2)} \text{ et } \frac{d'}{7}$$

$$\Rightarrow \frac{d'}{(n+2)(n-2) + 7} \text{ et } \frac{d'}{7} \Rightarrow \frac{d'}{n^2 + 3} \text{ et } \frac{d'}{7}$$

donc : $\frac{d'}{A \wedge B}$ donc $\frac{d'}{d}$

donc $\frac{d}{d'} \text{ et } \frac{d'}{d} \text{ et } d \in \mathbb{N} \text{ et } d' \in \mathbb{N}$ donc

donc $d = d'$ donc : $A \wedge B = (n+2) \wedge 7$

$$2) \quad \frac{n^2 + 3}{n+2} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \frac{n+2}{n^2 + 3} \text{ et et on a : } \frac{n+2}{n+2}$$

$$\text{Donc : } \frac{n+2}{A \wedge B} \text{ Donc : } \frac{n+2}{(n+2) \wedge 7}$$

Donc : $\frac{n+2}{7}$ or 7 est premier donc :

Il faut que $n+2 \in \{1; 7\}$ ce qui entraîne que $n=5$

Exercice33: $a = (25^n - 1)(36^n - 1)$ et $b = (5^n - 1)(6^n - 1)$

Calculer les $a \vee b$ ($n \in \mathbb{N}$)

Solution33 :

$$a = ((5^n)^2 - 1)((6^n)^2 - 1) = (5^n - 1)(5^n + 1)(6^n - 1)(6^n + 1)$$

$$a = b(5^n + 1)(6^n + 1) \text{ donc } \frac{b}{a} \text{ donc } a \vee b = a$$

Exercice34 : Résoudre dans \mathbb{N}^2 les équations suivantes : a) $x^2 - y^2 = 32$ avec $x > y$

b) $2xy + 2x + y = 99$

Solution34 : a) $x^2 - y^2 = 32 \Leftrightarrow (x - y)(x + y) = 32$

$x - y$ et $x + y$ sont des diviseurs positifs de 32

Et $(x - y) + (x + y) = 2x$ est un nombre pair

Donc $x - y$ et $x + y$ ont la même parité $32 = 2^5$

On dresse un tableau :

$x - y$	2	4
$x + y$	16	8
x	9	6
y	7	2

$$S = \{(6; 2); (9; 7)\}$$

b) $2xy + 2x + y = 99 \Leftrightarrow 2xy + y + 2x + 1 - 1 = 99$

$$\Leftrightarrow y(2x + 1) + 2x + 1 = 99 + 1 \Leftrightarrow (2x + 1)(y + 1) = 100$$

Donc : $2x + 1$ et $y + 1$ sont des diviseurs positifs de 100

$$D_{100} = \{1; 2; 4; 5; 10; 20; 25; 50; 100\}$$

$2x + 1$	1	2	4	5	20	25	50	100
$y + 1$	100	50	25	20	5	4	2	1
x	0			2		12		
y	99			10		3		

$$S = \{(0; 99); (2; 19); (12; 3)\}$$

Exercice35 : Quelles sont les valeurs de l'entier relatif n pour lesquelles : $n + 2/3n + 1$

Solution35 : $n + 2/3n + 1$ et $n + 2/n + 2$

$n + 2/3n + 1$ et $n + 2/3n + 6$ donc

$$n + 2/(3n + 6) - (3n + 1) \text{ donc } n + 2/5$$

Les diviseurs de 5 sont 1 ; -1 ; 5 ; -5

Il faut que $n + 2 \in \{-1; -5; 1; 5\}$ ce qui entraîne que

$$n \in \{-3; -7; -1; 3\}$$

On vérifie que si $n \in \{-3; -7; -1; 3\}$ alors $n + 2/3n + 1$ avant de conclure.

Conclusion : les valeurs de l'entier relatif n pour lesquelles : $n + 2/3n + 1$ sont : -7 ; -3 ; -1 ; 3

Exercice 36 : Quelles sont les valeurs de l'entier relatif n pour lesquelles la fraction $\frac{3n+8}{n+4}$

représente un entier relatif ?

Solution36 : Cette fraction a un sens si $n + 4 \neq 0$, soit $n \neq -4$

$$\text{On constate que } 3n + 8 = 3(n + 4) - 4$$

$n + 4$ divise $3(n + 4)$, donc $n + 4$ divise $3n + 8$ si $n + 4$ divise -4.

Les diviseurs de -4 sont 1 ; -1 ; 2 ; -2 ; 4 ; -4.

Il faut que $n + 4 \in \{-4; -2; -1; 1; 2; 4\}$ ce qui entraîne que $n \in \{-8; -6; -5; -3; -2; 0\}$

On vérifie que -4 n'appartient pas à -8 ; -6 ; -5 ; -3 ; -2 ; 0 avant de conclure.

Conclusion : la fraction $\frac{3n+8}{n+4}$ représente un entier relatif pour les valeurs de l'entier relatif n : -8 ; -6 ; -5 ; -3 ; -2 ; 0.

Exercice37 : déterminer : $d = (-8316) \wedge 1080$ et $m = 8316 \vee 1080$

Solution 37 : la décomposition des nombres 8316 et 1080 en produit des facteurs premiers

$$\text{Donnent : } 8316 = 2^2 \times 3^3 \times 7 \times 11 \text{ et}$$

$$1080 = 2^3 \times 3^3 \times 5$$

$$d = 8316 \wedge 1080 = 2^2 \times 3^3 = 108 \text{ et}$$

$$m = 8316 \vee 1080 = 2^3 \times 3^3 \times 5 \times 7 \times 11 = 11880$$

Exercice38 : si $2 = a \wedge b$ et $-12 = a \times b$ déterminer : $a \vee b$

Solution 38 : on a $a \wedge b \times (a \vee b) = |ab|$ donc $a \vee b = |a \times b|/a \wedge b = |-12|/2 = 6$

Exercice 39 : n et a et b des entiers naturels Démontrer que si q est le quotient de la division euclidienne de n par a et q' est le quotient de q par b alors q' est aussi le quotient de n par ab

Solution39 : soit r le reste de la division euclidienne de n par a et r' le reste de la division euclidienne de q par b on a donc : $n = aq + r$ et $0 \leq r \leq a - 1$ et on a : $q = bq' + r'$ et $0 \leq r' \leq b - 1$ donc on déduit que : $n = a(bq' + r') + r = abq' + ar' + r$

Et puisque : $0 \leq r' \leq b - 1$ et $0 \leq r \leq a - 1$ alors : $ar' + r \leq ab - 1$ donc $n = abq' + ar' + r$

$0 \leq ar' + r \leq b - 1$ conclusion : q' est aussi le quotient de n par ab

Exercice 40: Déterminer le reste de la division euclidienne de $19^{52} \times 23^{41}$ par 7

Solution40 : on a $19 \equiv 5[7]$ donc $19^2 \equiv 4[7]$

donc : $19^4 \equiv 2[7]$ donc $19^{52} \equiv 2^{13}[7]$

Et on a $23 \equiv 2[7]$ donc $23^{41} \equiv 2^{41}[7]$ donc

$23^{41} \times 19^{52} \equiv 2^{13} \times 2^{41}[7]$

Donc : $23^{41} \times 19^{52} \equiv 2^{54}[7]$

donc $23^{41} \times 19^{52} \equiv (2^3)^{18}[7]$

donc $23^{41} \times 19^{52} \equiv 8^{18}[7]$

et puisque : $8 \equiv 1[7]$ donc $23^{41} \times 19^{52} \equiv 1[7]$

Conclusion : 1 est le reste de la division

euclidienne de $19^{52} \times 23^{41}$ par 7

Exercice41 : 1) montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$

$(n+1)^{2019} - 1 \equiv 0[n]$

2) montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}$ $4^{2n+2} \equiv 1[15]$

Solution41 : 1) on a : $n+1 \equiv 1[n]$ donc :

$(n+1)^{2019} \equiv 1^{2019}[n]$ donc : $(n+1)^{2019} - 1 \equiv 0[n]$

2) on a : $4^2 \equiv 1[15]$ donc : $(4^2)^{n+1} \equiv 1^{n+1}[15]$

donc : $4^{2n+2} \equiv 1[15]$

Exercice42: $n \in \mathbb{N}$ on pose $U_n = 4^n - 3n - 1$

1) montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_{n+1} = 4U_n + 9n$

2) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ 9 divise $4^n - 3n - 1$

Solution42 : 1) on a $U_{n+1} = 4^{n+1} - 3(n+1) - 1$

donc $U_{n+1} = 4 \times 4^n - 3n - 3 - 1$

et puisque : $U_n = 4^n - 3n - 1$ donc :

$4^n = U_n + 3n + 1$ donc : $U_{n+1} = 4U_n + 9n$

2) notons P(n) La proposition suivante :

« 9 divise U_n ». Nous allons démontrer par

récurrence que P(n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1étapes : l'initialisation : Pour $n=0$ nous avons

$U_0 = 4^0 - 3 \times 0 - 1 = 0$ donc 9 divise 0 .

Donc P (0) est vraie.

2étapes : d'hérité ou Hypothèse de récurrence

: Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : « 9

divise U_n »

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie. Montrons alors que : « 9 divise U_{n+1} » ??

c'est-à-dire Montrons que $U_{n+1} \equiv 0[9]$??

On a d'après l'hypothèse de récurrence :

« 9 divise U_n » donc $U_n \equiv 0[9]$ donc $4U_n \equiv 0[9]$

Et on a : $9n \equiv 0[9]$ donc $U_n + 9n \equiv 0[9]$ donc

$U_{n+1} \equiv 0[9]$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$ 9 divise $4^n - 3n - 1$

Exercice43 : Résoudre dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ l'équation:

$$x^2 - x - 2 = 0$$

Solution43 : on Dresse une table des opérations

$$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{ \bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4} \}$$

Comme suite :

x	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
x^2	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$
$x^2 - x - 2$	$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$

Et en utilisant cette une table on déduit que

$\bar{2}$ et $\bar{4}$ sont les solutions de l'équation

$$\text{Donc : } S = \{\bar{2}, \bar{4}\}$$

Exercice 44: $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$ et $c \in \mathbb{Z}$ et $d \in \mathbb{Z}$ tels que : $a = bc + d$

1) montrer que $a \wedge b = b \wedge d$

2) En déduire que : $a \wedge b = b \wedge (a - bc)$

Solution44 : 1) on pose $\Delta_1 = a \wedge b$ et $\Delta_2 = b \wedge d$

On a : $\Delta_1 \not| a$ et $\Delta_1 \not| b$ donc $\Delta_1 \not| a$ et $\Delta_1 \not| bc$ donc

$\Delta_1 \not| a - bc$ donc $\Delta_1 \not| d$

donc $\Delta_1 \not| d$ et $\Delta_1 \not| b$ donc $\Delta_1 \not| b \wedge d$ donc $\Delta_1 \not| \Delta_2$

inversement On a : $\Delta_2 \not| b$ et $\Delta_2 \not| d$ donc $\Delta_2 \not| d$ et

$\Delta_2 \not| bc$ donc $\Delta_2 \not| bc + d$ donc $\Delta_2 \not| a$

donc $\Delta_2 \not| a$ et $\Delta_2 \not| b$ donc $\Delta_2 \not| a \wedge b$ donc $\Delta_2 \not| \Delta_1$

On a donc : $\Delta_1 \not| \Delta_2$ et $\Delta_2 \not| \Delta_1$ et $\Delta_1 \in \mathbb{N}$ et $\Delta_2 \in \mathbb{N}$

donc $\Delta_1 = \Delta_2$

donc : $a \wedge b = b \wedge d$

2) on a : $a = bc + (a - bc)$ si on prend : $d = a - bc$ et

d'après 1) on aura : $a \wedge b = b \wedge d = b \wedge (a - bc)$

Exercice45 : $a \in \mathbb{N}$ On considère les deux

nombres : $A = 35a + 57$ et $B = 45a + 76$

montrer que $A \wedge B = 1$ ou $A \wedge B = 19$

Solution45 : 1) on pose $d = A \wedge B$

$\Rightarrow d \not| A$ et $d \not| B \Rightarrow d \not| 35a + 57$ et $d \not| 45a + 76$

$\Rightarrow d \not| 9(35a + 57)$ et $d \not| 7(45a + 76)$

$$\Rightarrow \frac{d}{315a+513} \text{ et } \frac{d}{315a+532}$$

$\Rightarrow \frac{d}{19}$ or 19 est premier donc :

Il faut que $d \in \{1; 19\}$ ce qui entraîne que :

$$A \wedge B = 1 \text{ ou } A \wedge B = 19$$

Exercice 46 : $x \in \mathbb{N}^*$ et $y \in \mathbb{N}^*$ On considère les deux nombres : $a = 9x + 4y$ et $b = 2x + y$

1) montrer que $x \wedge y = a \wedge b$

2) $n \in \mathbb{N}$ on pose : $a = n^2 + 5n + 13$ et $b = n + 3$

a) montrer que $a \wedge b = b \wedge 7$

b) en déduire les valeurs possibles $a \wedge b = d$

c) montrer que : $n \equiv 4[7] \Leftrightarrow a \wedge b = 7$

d) en déduire les valeurs de $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$a \wedge b = 1$$

Solution 46 : 1) on pose $d = x \wedge y$ et $d' = a \wedge b$

montrons que : $d = d'$

$$d = x \wedge y \text{ donc : } \frac{d}{x} \text{ et } \frac{d}{y} \Rightarrow \frac{d}{a} \text{ et } \frac{d}{b}$$

Car il divise toute combinaison de x et y

$$\Rightarrow \frac{d}{a \wedge b} \Rightarrow \frac{d}{d'}$$

Inversement :

$$d' = a \wedge b \Rightarrow \frac{d'}{a} \text{ et } \frac{d'}{b} \Rightarrow \frac{d'}{9x+4y} \text{ et } \frac{d'}{2x+y}$$

$$\Rightarrow \frac{d'}{(9x+4y)-4(2x+y)} \text{ et } \frac{d'}{9(2x+y)-2(9x+4y)}$$

$$\Rightarrow \frac{d'}{x} \text{ et } \frac{d'}{y} \Rightarrow \frac{d'}{x \wedge y} \Rightarrow \frac{d'}{d}$$

ce qui entraîne : $d = d'$

2) $n \in \mathbb{N}$ on pose : $a = n^2 + 5n + 13$ et $b = n + 3$

a) montrons que $a \wedge b = b \wedge 7$?

la division euclidienne de $n^2 + 5n + 13$ par $n + 3$

donne : $n^2 + 5n + 13 = (n+3)(n+2) + 7$

Donc : $a = b(n+2) + 7 \Leftrightarrow a - b(n+2) = 7$

on pose $d' = b \wedge 7$ et $d = a \wedge b$

montrons que : $d = d'$

$$d = a \wedge b \Rightarrow \frac{d}{a} \text{ et } \frac{d}{b} \Rightarrow \frac{d}{a-b(n+2)} \text{ et } \frac{d}{b}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{7} \text{ et } \frac{d}{b} \Rightarrow \frac{d}{b \wedge 7} \Rightarrow \frac{d}{d'}$$

$$d' = b \wedge 7 \Rightarrow \frac{d'}{7} \text{ et } \frac{d'}{b} \Rightarrow \frac{d'}{b(n+2)+7} \text{ et } \frac{d'}{b}$$

$$\Rightarrow \frac{d'}{a} \text{ et } \frac{d'}{b} \Rightarrow \frac{d'}{a \wedge b} \Rightarrow \frac{d'}{d}$$

ce qui entraîne : $d = d'$

b) les valeurs possibles $a \wedge b = d$??

on a : $a \wedge b = b \wedge 7 = d$

donc : $\frac{d}{7}$ donc : $d = 1$ ou $d = 7$

c) montrons que : $n \equiv 4[7] \Leftrightarrow a \wedge b = 7$

$$n \equiv 4[7] \Leftrightarrow n+3 \equiv 0[7] \Leftrightarrow \frac{1}{n+3} \Leftrightarrow \frac{1}{b} \Leftrightarrow b \wedge 7 = 7 \Leftrightarrow b \wedge a = 7$$

d) les valeurs de $n \in \mathbb{N}$ tel que : $a \wedge b = 1$??

$$a \wedge b = 1 \Leftrightarrow n \text{ n'est pas congrue à 0 modulo 4}$$

$$n \equiv 0[7] \text{ ou } n \equiv 1[7] \text{ ou } n \equiv 2[7] \text{ ou } n \equiv 3[7] \text{ ou } n \equiv 5[7]$$

$$\text{ou } n \equiv 6[7]$$

Exercice 47: $n \in \mathbb{Z}$

on pose : $d_n = (2n+8) \wedge (3n+15)$

$$1) \text{ montrer que } \frac{d_n}{6}$$

2) déterminer les entiers relatifs n tel que $d_n = 6$

Solution 47 : 1) on a $d_n = (2n+8) \wedge (3n+15)$

$$\Rightarrow \frac{d_n}{2n+8} \text{ et } \frac{d_n}{3n+15} \Rightarrow \frac{d_n}{6n+24} \text{ et } \frac{d_n}{6n+30}$$

$$\Rightarrow \frac{d_n}{30-24} \Rightarrow \frac{d_n}{6}$$

$$2) 6 = (2n+8) \wedge (3n+15) \Rightarrow \frac{6}{2n+8} \text{ et } \frac{6}{3n+15}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2n+8 \equiv 0[6] \\ 3n+15 \equiv 0[6] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2n \equiv 4[6] \\ 3n \equiv 3[6] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{2}n = \bar{4} \\ \bar{3}n = \bar{3} \end{cases}$$

On Dresse une table dans

$$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{\bar{0}; \bar{1}; \bar{2}; \bar{3}; \bar{4}; \bar{5}\}$$

Comme suite :

n	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{2}n$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{3}n$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$

Et en utilisant cette une table on déduit que :

$n = \bar{5}$ Est la solution de l'équation

$$n = \bar{5} \Leftrightarrow n = 5 + 6k \text{ } k \in \mathbb{Z}$$

Inversement :

Si $n = 5 + 6k \text{ } k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} 2n+8 \equiv 0[6] \\ 3n+15 \equiv 0[6] \end{cases} \text{ donc } \frac{6}{2n+8} \text{ et } \frac{6}{3n+15}$$

donc $\frac{6}{d_n}$ et on a $\frac{d_n}{6}$ donc $d_n = 6$

Exercice 48: $a \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}^*$ et $a \geq 3$

et a est impair et on pose : $d = (2^a - 1) \wedge (2^b + 1)$

1) a) montrer que $2^{ab} \equiv 1[d]$

b) montrer que $2^{ab} \equiv -1[d]$

2) En déduire que : $d \in \{1; 2\}$

3) montrer que $d = 1$

Solution 48 : 1) a) montrons que $2^{ab} \equiv 1[d]$

On a : $d = (2^a - 1) \wedge (2^b + 1)$

Donc il existent : $\alpha \in \mathbb{N}^*$ et $\beta \in \mathbb{N}^*$ tels que :

$2^a - 1 = d\alpha$ et $2^b + 1 = d\beta$ donc :

$$2^{ab} = (2^a)^b = (d\alpha + 1)^b$$

Et on a : $d\alpha + 1 \equiv 1[d]$ Donc $(d\alpha + 1)^b \equiv 1[d]$

Par suite : $2^{ab} \equiv 1[d]$

1) a) montrons que $2^{ab} \equiv -1[d]$

$$\text{On a : } 2^{ab} = (2^b)^a = (d\beta - 1)^a$$

Et on a : $d\beta - 1 \equiv -1[d]$ Donc $(d\beta - 1)^a \equiv (-1)^a[d]$

et puisque a est impair on a $(d\beta - 1)^a \equiv -1[d]$

Par suite : $2^{ab} \equiv -1[d]$

2) $d \in \{1; 2\}$???

on a : $2^{ab} \equiv 1[d]$ et $2^{ab} \equiv -1[d]$ donc $0 \equiv 2[d]$

donc $d \neq 2$ et on a $d \in \mathbb{N}^*$ donc $d \in \{1; 2\}$

3) montrons que $d = 1$

On a : $2^a - 1$ et $2^b - 1$ sont impairs donc d est impair

Et puisque $d \in \{1; 2\}$ donc $d = 1$

Exercice49 : montrer que : $2^{4^{n+1}} + 5 \equiv 0[21] \forall n \in \mathbb{N}$

Solution49 : on pose $U_n = 2^{4^{n+1}} + 5$

notons $P(n)$ La proposition suivante :

« $U_n \equiv 0[21]$ ». Nous allons démontrer par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
1étapes : l'initialisation : Pour $n=0$ nous avons $U_0 = 2^4 + 5 = 21$ donc $U_0 \equiv 0[21]$.

Donc $P(0)$ est vraie.

2étapes : Supposons que $P(n)$ soit vraie

c'est-à-dire : $U_n \equiv 0[21]$

3étapes : Nous allons montrer que $P(n+1)$ est vraie. Montrons alors que : « $U_{n+1} \equiv 0[21]$ » ??

$$U_{n+1} = 2^{4^{n+2}} + 5 = 2^{4^{n+1} \times 4} + 5 = (2^{4^{n+1}})^4 + 5 = (U_n - 5)^4 + 5$$

On a d'après l'hypothèse de récurrence :

$U_n \equiv 0[21]$ donc $U_n - 5 \equiv -5[21]$ donc

$$(U_n - 5)^4 + 5 \equiv (-5)^4 + 5[21] \equiv 16 + 5[21] \equiv 0[21]$$

Donc : $U_{n+1} \equiv 0[21]$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 2^{4^{n+1}} + 5 \equiv 0[21]$

Exercice 50 : déterminer le nombre entier naturel n Tel que le quotient de la division euclidienne de n par 25 est p et le reste est p^2 ($p \in \mathbb{N}$)

Solution50 : $n \in \mathbb{N}$

$n = 25p + p^2$ et $0 \leq p^2 < 25$ donc $0 \leq p < 5$

Donc :

$$\begin{cases} p=0 \\ n=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} p=1 \\ n=26 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} p=2 \\ n=54 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} p=3 \\ n=84 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} p=4 \\ n=116 \end{cases}$$

Donc : $n \in \{0; 26; 54; 84; 116\}$

Exercice51: $b \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{Z}$

si q est le quotient de la division euclidienne de $a-1$ par b déterminer le quotient de la division euclidienne de $ab^9 - 1$ par b^{10}

Solution51 : soit r le reste de la division euclidienne de $a-1$ par b donc :

$$a-1 = bq + r \text{ et } 0 \leq r < b$$

$$\text{Donc : } ab^9 - b^9 = b^{10}q + rb^9$$

$$\text{Donc : } ab^9 - 1 = b^{10}q + rb^9 + b^9 - 1$$

$$\text{Donc : } ab^9 - 1 = b^{10}q + (r+1)b^9 - 1$$

On montre que : $0 \leq (r+1)b^9 - 1 < b^{10}$???

On a : $0 \leq r < b$ donc $0 \leq r+1 \leq b$

donc $0 \leq (r+1)b^9 \leq b^{10}$ donc $0 \leq (r+1)b^9 - 1 \leq b^{10} - 1$

donc $0 \leq (r+1)b^9 - 1 < b^{10}$

conclusion : q est aussi le quotient de la division euclidienne de $ab^9 - 1$ par b^{10}

Exercice52 : 1) montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$(n+2)^{n+2} - 2^{n+2}(n+1) \equiv 0[n^2]$$

2) montrer que: $7^{7^{7^7}} \equiv 3[10]$

Solution52 : 1) on a : $(n+2)^{n+2} = \sum_{k=0}^{n+2} C_{n+2}^k n^k 2^{n+2-k}$

Donc :

$$(n+2)^{n+2} = C_{n+2}^0 n^0 2^{n+2} + C_{n+2}^1 n^1 2^{n+1} + \sum_{k=2}^{n+2} C_{n+2}^k n^k 2^{n+2-k}$$

$$(n+2)^{n+2} = 2^{n+2} + (n+2)n2^{n+1} + \sum_{k=2}^{n+2} C_{n+2}^k n^k 2^{n+2-k}$$

$$\text{Donc : } (n+2)^{n+2} = 2^{n+1}(2 + n^2 + 2n) + n^2 \sum_{k=2}^{n+2} C_{n+2}^k n^k 2^{n-k}$$

$$(n+2)^{n+2} = 2^{n+1}(2 + 2n) + 2^{n+1}n^2 + n^2 \sum_{k=2}^{n+2} C_{n+2}^k n^k 2^{n-k}$$

$$(n+2)^{n+2} - 2^{n+2}(1+n) = n^2 \left(2^{n+1} + \sum_{k=2}^{n+2} C_{n+2}^k n^k 2^{n-k} \right)$$

$$\text{on a : } n^2 \left(2^{n+1} + \sum_{k=2}^{n+2} C_{n+2}^k n^k 2^{n-k} \right) \equiv 0[n^2]$$

$$\text{donc : } (n+2)^{n+2} - 2^{n+2}(n+1) \equiv 0[n^2]$$

2) on a : $7 \equiv 7[10]$ et $7^2 \equiv -1[10]$ donc $7^4 \equiv 1[10]$

Donc : $7^{4k} \equiv 1[10]$ et $7^{4k+1} \equiv 7[10]$ et $7^{4k+2} \equiv 9[10]$

$7^{4k+3} \equiv 3[10]$

On aussi : $7 \equiv 3[4]$ et $7^2 \equiv 1[4]$

Donc $7^{2k} \equiv 1[4]$ et $7^{2k+1} \equiv 3[4]$

Or : $7^{7^{7^7}} \equiv 1[2]$ (car impair)

Donc : $7^{7^{7^{7^7}}} \equiv 3[10]$

Exercice53 :

1)a)en déduire que : $2^{4k+r} \equiv 2^r[5] \forall (k;r) \in \mathbb{N}^2$

b)Déterminer et discuter suivants les valeurs de l'entier naturel n le reste de la division par 5 du nombres 2^n

2)montrer que $\frac{5}{17^{4p+2} + 32^{4p+3} + 3} \forall p \in \mathbb{N}^*$

3)montrer que $\frac{5}{1^{2006} + 2^{2006} + 3^{2006} + 4^{2006}}$

Solution53 : 1) a)on a : $2^4 \equiv 1[5]$ donc

$(2^4)^k \equiv 1^k[5]$ donc $2^{4k} \equiv 1[5]$ donc $2^{4k} \times 2^r \equiv 2^r[5]$

Donc $2^{4k+r} \equiv 2^r[5] \forall (k;r) \in \mathbb{N}^2$

b) $2^n \equiv r[5]$ et $r \in \{0;1;2;3;4\}$

Si $n \in \mathbb{N}$ alors : $n = 4k+r$ avec $r \in \{0;1;2;3\}$

donc : $2^{4k} \equiv 1[5]$ et $2^{4k+1} \equiv 2[5]$ et $2^{4k+2} \equiv 4[5]$

et $2^{4k+3} \equiv 3[5]$

2)montrons que $\frac{5}{17^{4p+2} + 32^{4p+3} + 3} \forall p \in \mathbb{N}^*$?

on a : $17 \equiv 2[5]$ donc : $17^{4p+2} \equiv 2^{4p+2}[5]$

$32^{4p+3} \equiv -2^{4p+3}[5]$ $17^{4p+2} \equiv 4[5]$

on a : $32 \equiv 2[5]$ donc : $32^{4p+3} \equiv 2^{4p+3}[5]$

donc : $32^{4p+3} \equiv 3[5]$ donc $32^{4p+3} \equiv 2[5]$

donc $17^{4p+2} + 32^{4p+3} + 3 \equiv 4 + 3 + 3[5]$

donc $17^{4p+2} + 32^{4p+3} + 3 \equiv 0[5]$

donc $\frac{5}{17^{4p+2} + 32^{4p+3} + 3} \forall p \in \mathbb{N}^*$

3)

on a : $1 \equiv 1[5]$ et $2 \equiv 2[5]$ et $3 \equiv -2[5]$ et $4 \equiv -1[5]$

donc : $1^{2006} \equiv 1^{2006}[5]$ et $2^{2006} \equiv 2^{2006}[5]$ et

$3^{2006} \equiv (-2)^{2006}[5]$ et $4^{2006} \equiv (-1)^{2006}[5]$

donc ; $1^{2006} + 2^{2006} + 3^{2006} + 4^{2006} \equiv 2 + 2 \times 2^{2006}[5]$

$1^{2006} + 2^{2006} + 3^{2006} + 4^{2006} \equiv 2 + 2^{2007}[5]$

Or : $2007 = 4 \times 501 + 3$ donc : $2^{2007} \equiv 3[5]$

Donc : $1^{2006} + 2^{2006} + 3^{2006} + 4^{2006} \equiv 2 + 3[5] \equiv 0[5]$

Exercice54 : déterminer le chiffre des unités

des nombres suivants : 1) $2019^{2020^{2021}}$ 2) $1987^{1991^{1983}}$

Solution54 :

1) on a : $2019 \equiv -1[10]$ donc

$2019^{2020^{2021}} \equiv (-1)^{2020^{2021}}[10]$ et puisque 2020^{2021}

Est paire donc : $2019^{2020^{2021}} \equiv 1[10]$

le chiffre des unités est 1

2) on a : $1987 \equiv 7[10]$ donc $1987^2 \equiv 9[10]$

Et $1987^3 \equiv 3[10]$ et $1987^4 \equiv 1[10]$

Donc : $1987^{4k} \equiv 1[10]$ et $1987^{4k+1} \equiv 7[10]$ et

$1987^{4k+2} \equiv 9[10]$ et $1987^{4k+3} \equiv 3[10]$

$1991^{1983} \equiv ?[4]$

$1991 \equiv 3[4]$ et $1991^2 \equiv 1[4]$

on a : $1983 \equiv 1[2]$ donc : $1991^{1983} \equiv 3[4]$

donc : $1987^{1991^{1983}} \equiv 3[10]$

Le chiffre des unités est 3

Exercice55 : soit $N = \overline{dcba}$ un entier naturel
montrer que : $N \equiv a - b + c - d[11]$

Solution55 :

on a : $N = \overline{dcba} = a + b \times 10 + c \times 10^2 + d \times 10^3$

et on a : $10 \equiv -1[11]$ et $10^2 \equiv 1[11]$ et $10^3 \equiv -1[11]$

Donc : $N \equiv a - b + c - d[11]$

Exercice56 :

1)En utilisant l'algorithme d'Euclide calculer :

$67 \wedge 39$

2) en déduire deux nombres relatifs u et v tel que : $39u + 67v = 1$

Solution56 :

(1) $67 = 1 \times 39 + \boxed{28}$ (2) $39 = 1 \times 28 + \boxed{11}$

(3) $28 = 2 \times 11 + \boxed{6}$ (4) $11 = 1 \times 6 + \boxed{5}$

(5) $6 = 1 \times 5 + \boxed{1}$ (6) $5 = 1 \times 5 + \boxed{0}$

Donc : $67 \wedge 39 = 1$ c'est le dernier reste non nul dans l'algorithme d'Euclide

2) (5) $6 = 1 \times 5 + \boxed{1} \Rightarrow 6 - 1 \times 5 = \boxed{1}$

$\Rightarrow 6 - 1 \times (11 - 1 \times 6) = \boxed{1} \Rightarrow 2 \times 6 - 1 \times 11 = \boxed{1}$

$\Rightarrow 2 \times (28 - 2 \times 11) - 1 \times 11 = \boxed{1} \Rightarrow 2 \times 28 - 5 \times 11 = \boxed{1}$

$\Rightarrow 2 \times 28 - 5 \times (39 - 1 \times 28) = \boxed{1} \Rightarrow 7 \times 28 - 5 \times 39 = \boxed{1}$

$\Rightarrow 7 \times (67 - 1 \times 39) - 5 \times 39 = \boxed{1} \Rightarrow 7 \times 67 - 12 \times 39 = \boxed{1}$

Exercices pour le 2bac sm

Exercice57 : montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$

$$(3n+1) \wedge (7n+2) = 1$$

Solution57 : on a : $7(3n+1) - 3(7n+2) = 1$

Donc : $\exists (u; v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que

$$u(3n+1) + v(7n+2) = 1 \quad u = 7 \text{ et } v = -3$$

Donc d'après le théorème de Bézout on a :

$$(3n+1) \wedge (7n+2) = 1$$

Exercice58 : montrer que l'ensemble des solutions du système suivant est non vide :

$$\begin{cases} n \equiv 2[11] \\ n \equiv 3[7] \end{cases}$$

Solution58 : $\begin{cases} n \equiv 2[11] \\ n \equiv 3[7] \end{cases} \Leftrightarrow \exists (x; y) \in \mathbb{Z}^2 / \begin{cases} n = 11x + 2 \\ n = 7y + 3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \exists (x; y) \in \mathbb{Z}^2 / 11x + 2 = 7y + 3$$

$$\Leftrightarrow \exists (x; y) \in \mathbb{Z}^2 / 11x - 7y = 1 \text{ Or on sait que :}$$

$7 \wedge 11 = 1$ Donc d'après le théorème de Bézout :

$$\exists (u; v) \in \mathbb{Z}^2 / 11u + 7v = 1$$

Donc il suffit de prendre : $\begin{cases} x = u \\ y = -v \end{cases}$

Donc $\exists (x; y) \in \mathbb{Z}^2 / \begin{cases} n = 11x + 2 \\ n = 7y + 3 \end{cases}$

Par suite : l'ensemble des solutions du système est non vide

Exercice59 : résoudre dans \mathbb{Z}^2 l'équation suivante : (E) $7(x-2) = 3(y+1)$

Solution59 : $7(x-2) = 3(y+1) \Leftrightarrow 7/3(y+1)$

Or on sait que : $7 \wedge 3 = 1$

Donc d'après le théorème de Gauss : $7/y+1$

Donc $\exists k \in \mathbb{Z} / y+1 = 7k \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / y = 7k - 1$

(E) $\Leftrightarrow \begin{cases} 7(x-2) = 3(y+1) \\ \exists k \in \mathbb{Z} / y = 7k - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7(x-2) = 3 \times 7k \\ \exists k \in \mathbb{Z} / y = 7k - 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = 3k \\ \exists k \in \mathbb{Z} / y = 7k - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3k + 2 \\ \exists k \in \mathbb{Z} / y = 7k - 1 \end{cases}$

Donc $S = \{(3k+2; 7k-1) / k \in \mathbb{Z}\}$

Exercice60 : déterminer l'entier naturel n tel

que : $\frac{n(n^2+3n-2)}{n+1} \in \mathbb{N}$

Solution60 :1) $2) \frac{n(n^2+3n-2)}{n+1} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \frac{n+1}{n(n^2+3n-2)}$

or on a : $1 = (n+1) \wedge n$ car $(n+1) - n = 1$ (bezout)

Donc : $\frac{n+1}{n^2+8n-2}$

La division euclidienne de n^2+3n-2 par $n+1$

Donne : $n^2+3n-2 = (n+1)(n+2) - 4$

$$\frac{n+1}{n^2+3n-2} \text{ et } \frac{n+1}{n+1} \Rightarrow \frac{n+1}{n^2+3n-2 - (n+1)(n+2)} \\ \Rightarrow \frac{n+1}{-4} \Rightarrow \frac{n+1}{4}$$

Il faut que $n+1 \in \{1; 2; 4\}$ ce qui entraîne :

$$n \in \{0; 1; 3\}$$

Inversement : On vérifie que 0 ; 1 ; 3 vérifient

$$\frac{n(n^2+3n-2)}{n+1} \in \mathbb{N} \text{ Avant de conclure que :}$$

$$\frac{n(n^2+3n-2)}{n+1} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow n \in \{0; 1; 3\}$$

Exercice61 : déterminer dans \mathbb{N}^2 les couples

$$(x; y) / \begin{cases} x+y = 48 \\ x \wedge y = 4 \end{cases} \text{ avec } x \leq y$$

Solution61 : $\begin{cases} x+y = 48 \\ x \wedge y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \exists (x'; y') \in \mathbb{N}^2 / \begin{cases} x = 4x' \\ y = 4y' \\ x+y = 48 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \exists (x'; y') \in \mathbb{N}^2 / 4x' + 4y' = 48$$

$$\Leftrightarrow \exists (x'; y') \in \mathbb{N}^2 / x' + y' = 12$$

on Dresse une table comme suit :

x'	0	1	2	3	4	5	6
y'	12	11	10	9	8	7	6
x	0	4	8	12	16	20	24
y	48	44	40	36	32	28	24

Donc :

$$S = \{(0; 48); (4; 44); (8; 40); (12; 36); (16; 32); (20; 28); (24; 24)\}$$

Exercice62: résoudre dans \mathbb{Z} le système

$$\text{suivant: } \begin{cases} 2x \equiv 3[7] \\ 3x \equiv 1[5] \end{cases}$$

Solution5762:

$$\begin{cases} 2x \equiv 3[7] \\ 3x \equiv 1[5] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \equiv -4[7] \\ 3x \equiv 1[5] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv -2[7] \\ 3x \equiv 1[5] \end{cases}$$

Car $2 \wedge 7 = 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 5[7] \\ 3x \equiv 1[5] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 + 7k; k \in \mathbb{Z} \\ 3x \equiv 1[5] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 + 7k; k \in \mathbb{Z} \\ 3(5 + 7k) \equiv 1[5] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 + 7k; k \in \mathbb{Z} \\ k \equiv 1[5] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 + 7k; k \in \mathbb{Z} \\ k \equiv 1 + 5k' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 5 + 7(1 + 5k'); k' \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 35k' + 12; k' \in \mathbb{Z}$$

$$S = \{35k' + 12; k' \in \mathbb{Z}\}$$

Exercice63: 1) Montrer que : $\forall a \in \mathbb{Z}^*$ et $\forall b \in \mathbb{Z}^*$

$$\text{on a : } a \wedge b = 1 \Rightarrow \begin{cases} a \wedge (a+b) = 1 \\ b \wedge (a+b) = 1 \\ a \wedge b(a+b) = 1 \\ (a+b) \wedge ab = 1 \end{cases}$$

Solution63: on pose $d = a \wedge (a+b)$ montrons que :

$$\begin{aligned} d = 1 \text{ on a : } d = a \wedge b \Rightarrow d \nmid a \text{ et } d \nmid a+b \\ \Rightarrow d \nmid a \text{ et } d \nmid a+b-a \Rightarrow d \nmid a \text{ et } d \nmid b \Rightarrow d \nmid b \wedge a \Rightarrow \\ d \nmid 1 \Rightarrow d = 1 \text{ ce qui entraîne: } 1 = a \wedge (a+b) \quad (1) \end{aligned}$$

de même on montre que : $1 = b \wedge (a+b) \quad (2)$

de (1) et (2) en déduit que : $(a+b) \wedge ab = 1$

D'après une proposition

Et on a $a \wedge (a+b) = 1$ et $a \wedge b = 1$ donc

$a \wedge b(a+b) = 1$ D'après la même proposition

Exercice64: Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$

$$(2n+5) \wedge (n^2+5n+6) = 1$$

Solution64: on a : $n^2+5n+6 = (n+2)(n+3)$

Et on a : $(2n+5) - 2(n+2) = 1$

Donc d'après le théorème de Bézout

$$(n+2) \wedge (2n+5) = 1 \quad (1)$$

De même : on a : $2(n+3) - (2n+5) = 1$

Donc d'après le théorème de Bézout

$$(n+3) \wedge (2n+5) = 1 \quad (2) \text{ de (1) et (2) en déduit}$$

que : $(2n+5) \wedge ((n+3)(n+2)) = 1$

$$\text{Donc : } (2n+5) \wedge (n^2+5n+6) = 1$$

Exercice65: en utilisant Fermat Montrer que :

$$1) 3^{13} + 5^{35} + 7^{57} \equiv 1[11]$$

$$2) 2^{16n+1} + 7^{32n+2} \equiv 0[17]$$

Solution65: 1) On a : 11 est premier et 11 ne divise pas 3 alors $3^{10} \equiv 1[11]$ Donc : $3^{13} \equiv 3^3[11] \equiv 5[11]$

De même : On a : 11 est premier et 11 ne divise pas 5 alors $5^{10} \equiv 1[11]$ Donc : $5^{35} \equiv 5^5[11] \equiv 1[11]$

De même : On a : 11 est premier et 11 ne divise pas 7 alors $7^{10} \equiv 1[11]$

$$\text{Donc : } 7^{57} \equiv 7^7[11] \equiv 6[11]$$

Finalement on a : $3^{13} + 5^{35} + 7^{57} \equiv 5+1+6[11] \equiv 1[11]$

$$2) 2^{16n+1} + 7^{32n+2} \equiv 0[17] ??$$

On a : 17 est premier et 17 ne divise pas 2 alors

$$2^{16} \equiv 1[17] \text{ donc : } 2^{16n+1} \equiv 2^1[17] \equiv 2[17]$$

De même : On a : 17 est premier et 17 ne divise pas 7 alors $7^{16} \equiv 1[17]$ donc : $7^{32} \equiv 1[17]$

$$\text{donc : } 7^{32n+2} \equiv 7^2[17] \equiv 15[17]$$

$$\text{Finalement on a : } 2^{16n+1} + 7^{32n+2} \equiv 0[17]$$

Exercice66: écrire dans le système de numération à base 3 le nombre 73

Solution66:

$$1) \text{On a : } 73 = 3 \times 24 + 1 \quad q_0 = 24 \text{ et } r_0 = 1$$

$$24 = 3 \times 8 + 0 \quad q_1 = 8 \text{ et } r_1 = 0$$

$$8 = 3 \times 2 + 2 \quad q_2 = 2 \text{ et } r_2 = 2$$

$$2 = 3 \times 0 + 2 \quad q_3 = 0 \text{ et } r_3 = 2$$

$$\text{Donc : } 73 = \overline{r_3 r_2 r_1 r_0}_{(3)} = \overline{2201}_{(3)}$$

$$73 = 2 \times 3^3 + 2 \times 3^2 + 0 \times 3^1 + 1 \times 3^0$$

Exercice67: déterminer les entiers naturels

$$x \text{ et } y \text{ tel que : } \overline{x0y}_{(5)} = \overline{y0x}_{(7)}$$

Solution67:

$$\overline{x0y}_{(5)} = \overline{y0x}_{(7)} \Leftrightarrow x \times 5^2 + 0 \times 5^1 + y \times 5^0 = y \times 7^2 + 0 \times 7^1 + x \times 7^0$$

$$\Leftrightarrow 25x + y = x + 49y \Leftrightarrow 48y = 24x \Leftrightarrow 2y = x$$

$$\Leftrightarrow (x; y) = (2k; k) \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \text{ et } 0 \leq x \leq 3 \text{ et }$$

$$0 \leq y \leq 3 \text{ Donc : } \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Exercice68: 1) résoudre dans $\mathbb{Z} / 7\mathbb{Z}$

$$\bar{2}x^3 + x + \bar{3} = \bar{0}$$

2) déterminer les entiers naturels n tels que :

$$7 \text{ divise } \overline{2013}_{(n)}$$

Solution68: On Dresse une table dans

$$\mathbb{Z} / 7\mathbb{Z} = \{\bar{0}; \bar{1}; \bar{2}; \bar{3}; \bar{4}; \bar{5}; \bar{6}\} \text{ Comme suite :}$$

n	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{2}x^3$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{5}$
$\bar{2}x^3 + x + \bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$

Et en utilisant cette une table on déduit que :

$\bar{2}$ et $\bar{6}$ sont les solutions de l'équation

$$\text{Donc : } S = \{\bar{2}; \bar{6}\}$$

$$2) \overline{2013}_{(n)} = 2 \times n^3 + 0 \times n^2 + 1 \times n^1 + 3 \times n^0 = 2n^3 + n + 3$$

$$7 \text{ divise } \overline{2013}_{(n)} \Leftrightarrow 2n^3 + n + 3 \equiv 0[7]$$

$$\Leftrightarrow \bar{2}n^3 + n + \bar{3} = \bar{0} \text{ Donc : } n = \bar{2} \text{ ou } n = \bar{6}$$

$$\text{Donc : } n = 7k + 2 / k \in \mathbb{N} \text{ ou } n = 7k + 6 / k \in \mathbb{N}$$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »
Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs
et exercices

Que l'on devient un mathématicien

