PROF: ATMANI NAJIB

Le produit scalaire

Exercice 1
Une unité de longueur a été choisie.
Soit ABC un triangle équilatéral de côté 3, B' est le milieu de [AC] et D le point défini par la relation : $4\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC}$
1. a) Démontrer que D est le barycentre du système : (A,3) ; (B,-2) ; (C,3)
   b) En déduire que D appartient à la médiatrice du segment [AC].

2. Démontrer que $\overrightarrow{BD} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{BB'}$

3. Calculer DA² et DB²

4. Déterminer l'ensemble (E) des points M vérifiant la relation : 3 MA² - 2 MB² + 3 MC² = 12
Vérifier que le centre de gravité G du triangle ABC appartient à (E).

Exercice 2
On considère dans le plan un triangle ABC tel que : AB = 7 cm, BC = 4 cm et AC = 5 cm.
Soit I le milieu de [BC].

1. Montrer que AI = $\sqrt{33}$ cm.

2. a) Soit M un point du plan.
Pour quelle valeur du réel m le vecteur $m\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ est-il égal à un vecteur $\vec{u}$ indépendant du point M ?
Déterminer alors $\vec{u}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AI}$.
   b) Déterminer et construire l'ensemble $\mathcal{F}$ des points M du plan tels que : -MA² + MB² + MC² = -25.

Exercice 3
Écrire une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$, sachant que le projeté orthogonal de l'origine sur $\mathcal{P}$ est le point A(1 ; 5 ; 7).

Exercice 4
Écrire une équation de la sphère de centre I(3 ; 1 ; -4), passant par le point A(4 ; 2 ; 1).

Exercice 5
Vérifier que A(4 ; -1 ; 2) est un point de la sphère $\mathcal{S}$; écrire une équation du plan tangent en A à $\mathcal{S}$.
$\mathcal{S}\ :\ x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y + 4z - 3 = 0$.

Exercice 6
Calculer la distance d du point A à la droite $\mathcal{D}$ sachant que :
la droite $\mathcal{D}$ a pour équation $-x + 4y - 2 = 0$;
et le point A a pour coordonnées (-1 ; 3).

Exercice 7
Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les points A(1 ; 0 ; 0), B(0 ; 1 ; 0), C(0 ; 0 ; 1) et D(0 ; -1 ; 0).

1. Vérifier que le triangle ABC est équilatéral.

2. Les droites (AD) et (BC) sont-elles orthogonales ?

3. Soit I le milieu de [AB] et J le milieu de [AD].
Calculer $\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{CJ}$. En déduire une mesure en degrés de l'angle $\widehat{ICJ}$.

4. On appelle H le projeté orthogonal de J sur la droite (CI).
Calculer les coordonnées de H.
Quel rôle joue le point H sur le triangle ABC ?

Exercice 8
ABCD est un tétraèdre, tel que AB = CD = a. On appelle I, J, K et L les milieux respectifs de [AD], [BC], [AC] et [BD].
1. Montrer que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{IJ}$ et que $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{KL}$.
2. Montrer que (IJ) et (KL) sont sécantes et orthogonales.
3. Quelle est la nature du quadrilatère IKJL ? Calculer la longueur de ses côtés en fonction de a.
4. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que IKJL soit un carré.

Exercice 9
Soit $\vec{u}\left(\sqrt{2}-1; 1; \sqrt{2}+1\right)$ et $\vec{v}\left(1; \sqrt{2}+1; -4+2\sqrt{2}\right)$.
Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$; qu'en déduit-on pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$?
Vérifier ce résultat par un autre calcul.

Exercice 10
Soient A, B, C, D quatre points quelconques du plan.
Démontrer que $(AB^2 + CD^2) - (AD^2 + CB^2) = 2\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AC}$ à l'aide de relations de Chasles judicieusement choisies dans le premier membre.

Exercice 11
1. Soit ABC est triangle. Pour tout point M du plan, montrer l'égalité : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.
2. *Application :* montrer que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.
Indication : On appelle H le point d'intersection de deux hauteurs. Montrer que H appartient aussi à la troisième hauteur.