Correction

Exercice 1

1. a) Le point D est défini par la relation suivante : $4\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC}$ donc :
$-4\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{0}$
$4\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{BD} + 3\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{0}$
$3\overrightarrow{DA} - 2\overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{0}$
D'où : **D est le barycentre du système (A,3) ; (B,-2) ; (C,3)**

1. b) On sait que :
D est le barycentre du système (A, 3) (B, -2) (C, 3),
B' est le milieu du segment [AC], donc B' est le barycentre de (A, 3) (C, 3).
D'après le théorème d'associativité du barycentre, D est le barycentre de (B', 6) (B, -2).
D appartient donc à la droite (BB'), médiatrice du segment [AC] (car ABC est un triangle équilatéral).

2. On sait que D est le barycentre de (B', 6) (B, -2). Donc :
$6\overrightarrow{DB'} - 2\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{0}$
$6\overrightarrow{DB} + 6\overrightarrow{BB'} - 2\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{0}$
$4\overrightarrow{DB} = -6\overrightarrow{BB'}$
$\overrightarrow{BD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BB'}$

3.
$DA^2 = (\overrightarrow{DB'} + \overrightarrow{B'A})^2$
$= DB'^2 + 2\overrightarrow{DB'} \cdot \overrightarrow{B'A} + B'A^2$
$= DB'^2 + 2 \times 0 + B'A^2 (car D appartient à la médiatrice du segment [AC])$
$= \left(\frac{1}{2}BB'\right)^2 + \left(\frac{1}{2}AC\right)^2$
$= \frac{1}{4} \times \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \times 3^2 \left(Rappel : la hauteur d'un triangle équilateral de cote a est égale a \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$
$= \frac{63}{16}$

Comme $\overrightarrow{BD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BB'}$, alors :
$DB^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \times BB'^2$
$DB^2 = \frac{9}{4} \times \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2$
$DB^2 = \frac{243}{16}$

4.
$3MA^2 - 2MB^2 + 3MC^2 = 12$
$\iff 3(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DA})^2 - 2(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DB})^2 + 3(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC})^2 = 12$
$\iff 3MD^2 + 6\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{DA} + 3DA^2 - 2MD^2 - 4\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{DB} - 2DB^2 +$
$3MD^2 + 6\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{DC} + 3DC^2 = 12$
$\iff 4MD^2 + 2\overrightarrow{MD} \cdot (3\overrightarrow{DA} - 2\overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{DC}) + 3DA^2 - 2DB^2 + 3DC^2 = 12$
$\iff 4MD^2 + 2\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{0} + 3DA^2 - 2DB^2 + 3DC^2 = 12$
$(car D est le barycentre de (A,3)(B,-2)(C,3))$
$\iff 4MD^2 = 12 - 3DA^2 + 2DB^2 - 3DC^2$
$\iff 4MD^2 = 12 - 6DA^2 + 2DB^2 (DA = DC car D appartient à la médiatrice du segment [AC])$
$\iff 4MD^2 = 12 - 6 \times \frac{63}{16} + 2 \times \frac{243}{16}$
$\iff MD^2 = \frac{75}{16}$

L'ensemble des points M est le cercle de centre D et de rayon $\frac{5\sqrt{3}}{4}$

Vérifions que le centre de gravité G du triangle ABC appartient à l'ensemble (E) :

Comme ABC est un triangle équilatéral, alors GA = GB = GC, donc :

$$3GA^2 - 2GB^2 + 3GC^2 = 4GB^2 = 4 \times \left(\frac{2}{3}BB'\right)^2 = 4 \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 12$$

G appartient à l'ensemble (E).

Exercice 2

1. **Montrons que AI = $\sqrt{33}$:**

• **Première méthode :**

D'après le théorème de la médiane, on a : $\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 = 2\mathrm{AI}^2 + \frac{\mathrm{BC}^2}{2}$

Donc :

$$\mathrm{AI}^2 = \frac{\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 - \frac{\mathrm{BC}^2}{2}}{2}$$

$$\mathrm{AI}^2 = \frac{7^2 + 5^2 - \frac{4^2}{2}}{2}$$

$$\mathrm{AI}^2 = \frac{49 + 25 - \frac{16}{2}}{2}$$

$$\mathrm{AI}^2 = \frac{66}{2}$$

$$\mathrm{AI}^2 = 33$$

D'où : AI = $\sqrt{33}$ cm.

• **Deuxième méthode :**

Remarquons d'abord que (AI) est la médiane du triangle ABC issue de A.

Identité du parrallélogramme :

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan, on a :$||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 = \frac{1}{2}\left(||\vec{u}+\vec{v}||^2 + ||\vec{u}-\vec{v}||^2\right)$

En prenant $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, on a :

$||\vec{u}+\vec{v}|| = ||\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|| = 2||\overrightarrow{AI}||$ et $||\vec{u}-\vec{v}|| = ||\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|| = ||\overrightarrow{BC}||$.

L'identité du parrallèlogramme devient alors :

$$||\overrightarrow{AI}||^2 = \frac{1}{2}\left(||\overrightarrow{AB}||^2 + ||\overrightarrow{AC}||^2 - \frac{1}{2}||BC||^2\right)$$

L'application numérique donne : $AI^2 = \frac{1}{2}\left(7^2 + 5^2 - \frac{1}{2} \times 4^2\right) = 33$

D'où : AI = $\sqrt{33}$ cm.

2. a) **Pour quelle valeur du réel m le vecteur $m\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ est-il égal à un vecteur $\vec{u}$ indépendant du point M ?**

$$m\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = m(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})$$

$$= (m+2)\overrightarrow{MI} + m\overrightarrow{IA} + \underbrace{\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}}_{=\vec{0}}$$

Donc $m\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ est indépendant du point M si et seulement si m = -2.

On obtient alors : $\vec{u} = -2\overrightarrow{IA}$.

2. b) **Déterminons l'ensemble $\mathcal{F}$ des points M du plan tels que -MA² + MB² + MC² = -25 :**

Transformons -MA² + MB² + MC² afin de faire apparaître le point I.

$$-MA^2 + MB^2 + MC^2 = MI^2 + (-IA^2 + IB^2 + IC^2) + 2\overrightarrow{MI} \cdot \underbrace{\left(-\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}\right)}_{=\vec{0}}$$

$$= \left(MI^2 - 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + IA^2\right) + (-2IA^2 + IB^2 + IC^2)$$

$$= \left(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}\right)^2 + (-2IA^2 + IB^2 + IC^2)$$

Or, on remarque que -25 = -33 + 2$\hat{2}$ + 2$\hat{2}$ = -IA² + IB² + IC², donc :

$$-MA^2 + MB^2 + MC^2 = -25 \iff \left(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}\right)^2 + (-2IA^2 + IB^2 + IC^2) = -IA^2 + IB^2 + IC^2$$

$\Longleftrightarrow \left(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}\right)^2 - \overrightarrow{IA}^2 = 0$
$\Longleftrightarrow \overrightarrow{MI} \cdot \left(\overrightarrow{MI} - 2\overrightarrow{IA}\right) = 0$
Soit J le point du plan tel que $\overrightarrow{IJ} = -2\overrightarrow{IA}$
On a donc que $-MA^2 + MB^2 + MC^2 = -25 \Longleftrightarrow \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} = 0$.
$\mathcal{F}$ est donc le cercle de diamètre [IJ].

Exercice 3

Ecrivons une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$, sachant que le projeté orthogonal de l'origine sur $\mathcal{P}$ est le point A(1 ; 5 ; 7) :
Le vecteur $\overrightarrow{OA}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$, c'est-à-dire que pour tout point M(x ; y ; z) du plan $\mathcal{P}$, $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{OA} = 0$
M appartient au plan $\mathcal{P} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{OA} = 0$
$\Longleftrightarrow (x-1) \times (1-0) + (y-5) \times (5-0) + (z-7) \times (7-0) = 0$
$\Longleftrightarrow x + 5y + 7z - 65 = 0$.
D'où l'équation du plan $\mathcal{P}$.

Exercice 4

Ecrivons une équation de la sphère de centre I(3 ; 1 ; -4), passant par le point A(4 ; 2 ; 1) :
Calculons le rayon de la sphère : $R^2 = AI^2 = (3 - 4)^2 + (1 - 2)^2 + (-4 - 1)^2 = 27$.
On en déduit l'équation de la sphère : $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (z + 4)^2 = 27$.

Exercice 5

Vérifions que A(4 ; -1 ; 2) est un point de la sphère $\mathcal{S}$:
Transformons l'équation de $\mathcal{S}$:

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2-6x+2y+4z-3=0 &\Longleftrightarrow x^2-6x+y^2+2y+z^2+4z-3=0 \\ &\Longleftrightarrow (x-3)^2+(y+1)^2+(z+2)^2-3=3^2+1^2+2^2 \\ &\Longleftrightarrow (x-3)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=17 \end{aligned}$$

Regardons si les coordonnées de A vérifient l'équation de S :
$(4 - 3)^2 + (-1 + 1)^2 + (2 + 2)^2 = 1^2 + 0^2 + 4^2 = 17$.
Donc le point A appartient à la sphère $\mathcal{S}$.

Ecrivons une équation du plan tangent en A à $\mathcal{S}$:
Appelons ce plan $\mathcal{P}$.
Le centre de la sphère est le point I(3 ; -1 ; -2). $\overrightarrow{AI}$ est donc un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.
M (x ;y ;z) appartient à $\mathcal{P} \Longleftrightarrow \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{AM} = 0$
$\Longleftrightarrow (4-3) \times (x-4) + (-1-(-1)) \times (y+1) + (2-(-2)) \times (z-2) = 0$
$\Longleftrightarrow x + 4z - 12 = 0$
D'où l'équation du plan $\mathcal{P}$.

Exercice 6

Calculons la distance d du point A à la droite $\mathcal{D}$:
Distance d'un point à une droite dans le plan :
On considère la droite $\mathcal{D}$: ax + by + c = 0, avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $(a, b) \neq (0, 0)$.
M(x_M ; y_M ; z_M) est un point du plan.
La distance $d(\mathrm{M}, \mathcal{D})$ vaut ainsi : $d(\mathrm{M}, \mathcal{D}) = \dfrac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$
En appliquant la formule, il vient : $d = \dfrac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

D'où, $d = \dfrac{|-1\times(-1)+4\times 3-2|}{\sqrt{(-1)^2+4^2}} = \dfrac{11}{\sqrt{17}} = \dfrac{11\sqrt{17}}{17}$

Remarque : Quand on a oublié la formule, on la redémontre...
Soit H(xH ; y_{H}) le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}$.
On note $\mathcal{D}'$ la perpendiculaire à la droite $\mathcal{D}$ passant par A.
$\vec{u}(a;b)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}'$ (car c'est un vecteur normal de D)
Soit B(x_{B} ; y_{B}) un point de $\mathcal{D}$
$|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}| = ||\overrightarrow{AH}|| \times ||\vec{u}|| = d \times ||\vec{u}||$
D'autre part, avec l'autre formule du produit scalaire,

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}| &= |(x_B-x_A)\times a+(y_B-y_A)\times b| \\
&= |-(ax_A+b_{yA})+ax_B+by_{B=-c}| \\
&= |-(ax_A+b_{yA}+c)| \\
&= \,= |ax_A+b_{yA}+c|
\end{aligned}$$

On en déduit que : $d = \dfrac{|\overrightarrow{AB}.\vec{u}|}{||\vec{u}||} = \dfrac{|ax_A+b_{yA}+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Exercice 7

1. **Vérifions que le triangle ABC est équilatéral :**
On a facilement que $AB = BC = CA = \sqrt{1^2+1^2+0^2} = \sqrt{2}$ donc le triangle ABC est équilatéral.

2. **Les droites (AD) et (BC) sont-elles orthogonales ?**
On a : $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC} = (0-1)\times(0-0)+((-1)-0)\times(0-1)+(0-0)\times(1-0) = 1$
Donc les droites (AD) et (BC) ne sont pas orthogonales.

3. **Calculons $\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{CJ}$:**
On a $I\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};0\right)$ et $J\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2};0\right)$, donc :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{CJ} &= (x_I-x_C)\times(x_J-x_C)+(y_I-y_C)\times(y_J-y_C)+(z_I-z_C)\times(z_J-z_C) \\
&= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)+(-1)^2 \\
&= 1
\end{aligned}$$

Déduisons-en une mesure de l'angle $\widehat{ICJ}$:
$\cos(\widehat{ICJ}) = \dfrac{\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{CJ}}{||\overrightarrow{CI}||\times||\overrightarrow{CI}||}$.
Or, $||\overrightarrow{CI}|| = ||\overrightarrow{CI}|| = \dfrac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$, donc ;
$\cos(\widehat{ICJ}) = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}\times\sqrt{\frac{3}{2}}} = \dfrac{2}{3}$.
Avec la calculatrice, on obtient : $\widehat{ICJ} = 48°$.

4. **Calculons les coordonnées du point H :**
Le point H est l'intersection de la droite (CI) et du plan $\mathcal{P}$ normal à la droite (CI) passant par I. On choisit pour vecteur normal de $\mathcal{P}$ le vecteur $\overrightarrow{n} = 2\overrightarrow{CI}$ qui a pour coordonnées (1 ; 1 ; -2).
L'équation de $\mathcal{P}$ est donc de la forme : $x+y-2z+d=0$.
Pour trouver d, on dit que :
$J \in P \iff \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}+0+d=0$
$\iff d=0$.
D'où, $\mathcal{P} : x+y-2z=0$.
D'autre part, $(CI) : \begin{cases} x= & t \\ y= & t \\ z= & -2t+1 \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.
On injecte l'équation de (CI) dans l'équation de $\mathscr{P}$ et on trouve :
$t+t-2\times(-2t+1)=0 \iff t=\dfrac{1}{3}$.
On en déduit, $H\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3}\right)$.

Quel rôle joue le point H sur le triangle ABC ?
On remarque que $3\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$, donc H = G, centre de gravité du triangle ABC.

Exercice 8

1. **Montrons que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{IJ}$ et que $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{KL}$:**

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} &= (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JB}) + (\overrightarrow{DI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JC}) \\ &= 2\overrightarrow{IJ} - (\underbrace{\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{ID}}_{=\vec{0}}) + (\underbrace{\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JC}}_{=\vec{0}}) \\ &= 2\overrightarrow{IJ} \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} &= (\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KL} + \overrightarrow{LB}) - (\overrightarrow{DL} + \overrightarrow{LK} + \overrightarrow{KC}) \\ &= 2\overrightarrow{KL} - (\underbrace{\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KC}}_{=\vec{0}}) + (\underbrace{\overrightarrow{LB} + \overrightarrow{LD}}_{=\vec{0}}) \\ &= 2\overrightarrow{KL} \end{aligned}$$

2. **Montrons que (IJ) et (KL) sont sécantes et orthogonales :**
$\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{KL} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}) \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC}) = ||\overrightarrow{AB}||^2 - ||\overrightarrow{DC}||^2 = a^2 - a^2 = 0.$
Donc (IJ) et (KL) sont orthogonales.
On note $\mathscr{P}$ le plan engendré par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$et $\overrightarrow{DC}$ passant par I.
Ainsi M appartient au plan $\mathscr{P} \iff$ Il existe deux réels α et β tels que $\overrightarrow{IM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{DC}$.
Or, $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$, donc $J \in \mathscr{P}$.

$\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$, donc $K \in \mathscr{P}$.

$\overrightarrow{IL} = \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{DL} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, donc $L \in \mathscr{P}$.

Donc, les points I, J, K et L sont coplanaires. De plus, $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{KL}$ sont non colinéaires, donc les droites (IJ) et (KL) sont sécantes.

3. **Déterminons la nature du quadrilatère IKJL :**
Les diagonales (IJ) et (KL) de ce quadrilatère sont orthogonales, donc IKJL est un losange de côté $||\overrightarrow{IL}|| = \frac{1}{2}||\overrightarrow{AB}|| = \frac{a}{2}$.

4. **Trouvons une condition nécessaire et suffisante pour que IKJL soit un carré :**
IKJL est un carré $\iff ||\overrightarrow{IJ}|| = ||\overrightarrow{KL}||$
$\iff ||\overrightarrow{IJ}||^2 = ||\overrightarrow{KL}||^2$
$\iff ||\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}||^2 = ||\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC}||^2$
$\iff \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = 0$
$\iff \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont orthogonaux.

Exercice 9

Calculons $\vec{u} \cdot \vec{v}$:
$\vec{u} \cdot \vec{v} = \left(\sqrt{2} - 1\right) \times 1 + 1 \times \left(\sqrt{2} + 1\right) + (\sqrt{2} + 1) \times (-4 + 2\sqrt{2}) = 0$

Vérifions ce résultat par un autre calcul :
$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff 2\vec{u} \cdot \vec{v} = -2\vec{u} \cdot \vec{v}$
$\iff ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$
$\iff ||\vec{u} + \vec{v}||^2 = ||\vec{u} - \vec{v}||^2$
$||\vec{u} + \vec{v}||^2 = \sqrt{2}^2 + 2(1 + \sqrt{2})^2 + 9(1 - \sqrt{2})^2 = 33 - 14\sqrt{2}$
$||\vec{u} - \vec{v}||^2 = 2(1 - \sqrt{2})^2 + \sqrt{2}^2 + (5 - \sqrt{2})^2 = 33 - 14\sqrt{2}$
Donc $||\vec{u} + \vec{v}||^2 = ||\vec{u} - \vec{v}||^2$.
D'où : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Exercice 10

Démontrons que $\left(AB^2+CD^2\right)-\left(AD^2+CB^2\right)=2\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AC}$:

$\left(AB^2+CD^2\right)-\left(AD^2+CB^2\right)$
$=\left(AB^2+CD^2\right)-(AB^2+BD^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}+CD^2+DB^2+2\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{DB})$
$=2\left(-BD^2+\left(-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\right)\cdot\overrightarrow{BD}\right)$
$=2\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CD}\right)\cdot\overrightarrow{BD}$
$=2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}$
$=2\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AC}$

Exercice 11

1. Soit ABC est triangle. Pour tout point M du plan, montrer l'égalité : $\overrightarrow{\mathrm{MA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{MB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\overrightarrow{\mathrm{MC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$.

2. *Application :* montrer que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.
Indication : On appelle H le point d'intersection de deux hauteurs. Montrer que H appartient aussi à la troisième hauteur.

1. **Montrons, pour tout point M du plan, l'égalité : $\overrightarrow{\mathbf{MA}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{BC}}+\overrightarrow{\mathbf{MB}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{CA}}+\overrightarrow{\mathbf{MC}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{AB}}=0$:**

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MA}\cdot\left(\underbrace{\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}}_{=\overrightarrow{0}}\right)+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{0}.$$

2. **Montrons que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes :**

Soit H le point d'intersection de la hauteur issue de A et de celle issue de B. Montrons que H appartient à la hauteur issue de C.
Pour cela, on doit montrer que $\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.
$\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{AB}=-\underbrace{\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{BC}}_{=0}-\underbrace{\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{CA}}_{=0}=0.$
D'où : le point H appartient à la hauteur issue de C. Les trois hauteurs d'un triangle sont donc concourantes.