

1) Le produit scalaire de deux vecteurs l'espace

1) Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de l'espace. Et soient A ; B et C trois points l'espace tel que : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$; le produit scalaire de \vec{u} et \vec{v} dans l'espace est le produit scalaire de \overrightarrow{AB} par \overrightarrow{AC} dans le plan ABC , noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et c'est un nombre réel défini par :

Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{0}$

Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$ alors et si H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) et alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH} \times \overrightarrow{AB}$

2) toutes les propriétés du produit scalaire dans le plan sont aussi vraies dans l'espace

3) Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de l'espace.

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, si l'un des deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} est nul

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v})$, dans le cas contraire.

4) \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux dans l'espace si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Et on écrit : $\vec{u} \perp \vec{v}$

5) Si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. La norme du vecteur \vec{u} , notée $\|\vec{u}\|$ est la distance AB et on a :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}^2} = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} \quad \text{et} \quad \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$$

5) Pour tous vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} de l'espace., on a :

$$a) \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

$$b) \vec{u} \cdot (\vec{k} \vec{v}) = \vec{k} \vec{u} \cdot \vec{v} \text{, avec } k \text{ un nombre réel.}$$

$$c) \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

$$d) (\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

$$e) (\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

$$f) (\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$$

$$g) \|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0} \quad h) \|\vec{k} \vec{u}\| = |k| \|\vec{u}\|$$

$$i) \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 \right) \text{ et } \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \right)$$

$$j) \|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| \quad k) |\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$$

m) Soit A , B et C trois points de l'espace.

$$\text{On a : } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} (AB^2 + AC^2 - BC^2)$$

2) repère orthonormé de l'espace base orthonormé de l'espace

Soit O un point de l'espace

a) $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ est une base orthonormé si et seulement si les vecteurs \vec{i} et \vec{j} et \vec{k} sont non coplanaires et normés et orthogonaux deux à deux c à d : $\|\vec{i}\| = 1$ et $\|\vec{j}\| = 1$ et $\|\vec{k}\| = 1$ et $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$ et $\vec{j} \cdot \vec{k} = 0$ et $\vec{i} \cdot \vec{k} = 0$

et on dira alors que $(0; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ est un repère orthonormé

et si \vec{u} un vecteur de l'espace

alors Il existe un triplet unique $(x; y; z)$ de réels tels que :

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Ce triplet $(x; y; z)$ est appelé coordonnées du vecteur \vec{u} relativement à la base $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

5) analytique du produit scalaire dans l'espace :

$(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ est une base orthonormée

1) si: $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$ sont deux vecteurs de l'espace alors : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$ et $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

2) si $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$

$$\text{alors : } AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

1): soit $\vec{u}(a; b; c)$ un vecteur non nul et $A(x_A; y_A; z_A)$ un point de l'espace et $k \in \mathbb{R}$

L'ensemble des points $M(x; y; z)$ dans l'espace tq :

$\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = k$ c'est un plan d'équation cartésienne: $ax + by + cz + d = 0$

2) Un vecteur non nul \vec{n} est dit normal au plan (P) si, pour tous points A et M de (P) , on a $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$

3) Un vecteur est normal à un plan si et seulement si il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan.

Propriété : Soient a et b et c des réels non tous nuls quelconque. L'ensemble (P) des points $M(x; y; z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$ est un plan dont un vecteur normal est $\vec{n}(a; b; c)$.

Proposition : Soient : $(P) : ax + by + cz + d = 0$ et $(P)' : a'x + b'y + c'z + d' = 0$ deux plans dans l'espace et $\vec{n}(a; b; c)$ et $\vec{n}'(a'; b'; c')$ deux vecteurs normaux respectivement à (P) et $(P)'$

- 1) Les plans (P) et $(P)'$ sont parallèles ssi \vec{n} et \vec{n}' sont colinéaires
- 2) Les plans (P) et $(P)'$ sont sécants ssi \vec{n} et \vec{n}' sont non colinéaires
- 3) Les plans (P) et $(P)'$ sont perpendiculaires ssi \vec{n} et \vec{n}' sont orthogonaux

3) distance d'un point à un plan

Proposition : Soient : $A(x_A; y_A; z_A)$ un point et $(P) : ax + by + cz + d = 0$ un plan dans l'espace avec $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$ et H est le projeté orthogonal de A sur le plan. la distance du point A au plan (P) est la distance AH et on a : $d(A; (P)) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

Remarque : pour tout point M du plan (P) on a $AH \leq AM$

4) Etude analytique de la sphère

4-1) Dans tout ce qui va suivre, l'espace (\mathcal{E}) est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé.

1) Soit Ω un point dans l'espace (\mathcal{E}) .

R et un réel positif. La sphère de centre Ω et de rayon R est l'ensemble des points M dans (\mathcal{E}) , tels que $\Omega M = R$. On la note par : $S(\Omega, R) = \{M \in \mathcal{E} / \Omega M = R\}$

2) Soit $\Omega(a, b, c)$ un point dans l'espace et $R \geq 0$, la sphère $S(\Omega, R)$ à une équation cartésienne de la forme :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2 \quad (1)$$

4) Soient : $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ deux points de l'espace. L'ensemble des points $M(x; y; z)$ de l'espace tel que : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est la sphère de diamètre $[AB]$

Et d'équation cartésienne :

$$(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) + (z - z_A)(z - z_B) = 0$$

4-2) L'intersection d'une sphère et une droite :

Soient (D) une droite de l'espace

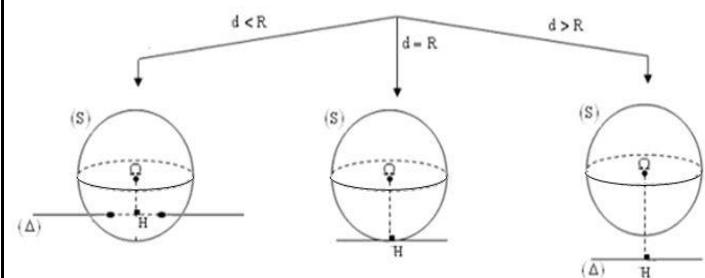
et (S) une sphère de centre O et de rayon R , H le projeté orthogonal du point O sur la droite (D) .

Notons $d = OH$:

• Si $d > R$ alors la droite (D) et la sphère (S) n'ont pas de points en commun, l'intersection est vide.

• Si $d = R$ alors la droite (D) et la sphère (S) ont un unique point en commun et dans ce cas on dit que la droite (D) est tangente en H à (S)

• Si $d < R$ alors la droite (D) et la sphère (S) en deux points en commun A et B symétriques par rapport au point H , dans ce cas on dit que la droite (D) est sécante à (S) . ($OA = OB = R$)



Remarque: Étudier la position relative de la sphère (S) et la droite (D) revient à résoudre un système formé par l'équation de la sphère et une de représentation paramétrique de la droite

4-3) L'intersection d'une sphère et un plan

Soient (S) une sphère de centre O et de rayon R , (P) un plan de l'espace, nommons H le projeté orthogonal de O sur le plan (P) et $d = OH$, la distance du point O au plan (P) .

• Si $d > R$ alors le plan (P) et la sphère (S) n'ont pas de points en commun, l'intersection est vide.

• Si $d = R$ alors le plan (P) et la sphère (S) ont un unique point en commun et dans ce cas on dit que le plan (P) est tangent en H à (S)

• Si $d < R$ alors l'ensemble des points commun au plan (P) et la sphère (S) est le cercle du plan (P) de centre H et de rayon $\sqrt{R^2 - d^2}$ (Théorème de Pythagore), dans ce cas on dit le plan (P) est sécant à (S) .

4-4) le plan tangent à une sphère en un point :

Soient (S) une sphère de centre Ω et $A \in (S)$

Il existe un plan (P) unique de l'espace tangent à la sphère en A et définie par : $M \in (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{A\Omega} = 0$

<http://abcmaths.e-monsite.com>

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »

Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien