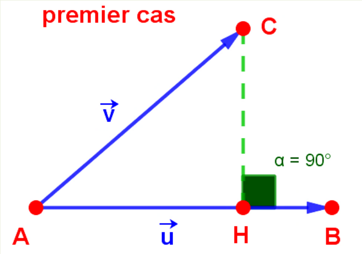
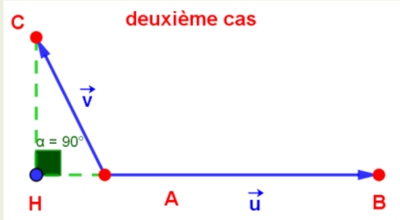
# I. Produit scalaire dans l'espace :

## a. Définition :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nul de l'espace $(\mathscr{E})$ ; A et B et C trois points de $(\mathscr{E})$ tel que : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ ; H est la projection de C sur la droite $(AB)$ .

Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est noté par $\vec{u}.\vec{v}$ ou $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ tel que :

| 1[ER] cas le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre: | 2[ième] cas le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre: |
|---|---|
| $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AH$ | $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB \times AH$ |
|   |   |

Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ on a $\vec{u}.\vec{v} = 0$

## b. Remarques :

- $\vec{u}.\vec{u} = \vec{u}^2$ est le carré scalaire de $\vec{u}$ est toujours positif .
- $\sqrt{\vec{u}.\vec{u}} = AB$ est la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ on note : $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}^2} = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}} = AB$.
- $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$ .
- $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u},\vec{v})$ ou $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaire ) $\Leftrightarrow |\vec{u}.\vec{v}| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

## c. Propriétés :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace $(\mathscr{E})$ ; $\alpha \in \mathbb{R}$ on a :

1. $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$
2. Symétrie du produit scalaire : $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ .
3. Positivité du produit scalaire : $\vec{u}.\vec{u} = \vec{u}^2 \geq 0$.
4. Non dégénère : $\vec{u}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$
5. Linéarité du produit scalaire : $\begin{cases} \vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w} \\ (\vec{v}+\vec{w}).\vec{u} = \vec{v}.\vec{u} + \vec{w}.\vec{u} \\ \vec{u}.(\alpha\vec{v}) = (\alpha\vec{u}).\vec{v} = \alpha(\vec{u}.\vec{v}) \end{cases}$
6. $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$ et $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$ et $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$ .

**d. Application :**

Soit $ABCD$ un tétraèdre de faces régulières ( chaque face est un triangle équilatéral de coté a pour longueur

- Montrer que deux cotés opposés sont orthogonaux ( exemple le coté opposé de $[AB]$ est le coté $[DC]$ .

**Correction :**

On montre que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0$ .

On a :

- ✓ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=a\times a\cos\frac{\pi}{3}=\frac{a^2}{2}\ (1)$ .
- ✓ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=AB\times AD\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)=a\times a\cos\frac{\pi}{3}=\frac{a^2}{2}\ (2)$ .
- ✓ D'où : 
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}&=\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\right)\\&=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\\&=\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{2}\quad(\text{ d'après } (1) \text{ et } (2))\ .\end{aligned}$$

Donc : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0$

**Conclusion :** $(AB)\perp(CD)$ . ( De la même façon on démontre que : $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD}=0$ et $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=0$ )

## II. Base et repère orthonormé :

**a. Rappel :**

$\vec{u}(x,y,z)$ et $\vec{v}(x',y',z')$ et $\vec{w}(x'',y'',z'')$ trois vecteurs de l'espace $(\mathcal{E})$ rapporté a une base $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

- Le déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ dans cet ordre est le nombre :

$$\det\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)=\begin{vmatrix}x & x' & x''\\ y & y' & y''\\ z & z' & z''\end{vmatrix}=x\begin{vmatrix}y' & y''\\ z' & z''\end{vmatrix}-y\begin{vmatrix}x' & x''\\ z' & z''\end{vmatrix}+z\begin{vmatrix}x' & x''\\ y' & y''\end{vmatrix}$$
$$=(xy'z''-xz'y'')+(-yx'z''+yz'x'')+(zx'y''-zy'x'')$$

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si $\det\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)=0$.

**b. Exemple :**

$\vec{u}(1,2,3)$ et $\vec{v}(-2,0,1)$ et $\vec{w}(1,0,3)$ on a :

$$\det\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)=\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 0 & 0\\ 3 & 1 & 3\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}0 & 0\\ 1 & 3\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix}=1\times0-2\times(-7)+3\times0=14$$

D'où : $\det\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)\neq0$

**Conclusion :**

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires donc le triplet $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est une base de l'espace $(\mathscr{E})$ .
- On prend un point O de l'espace $(\mathscr{E})$ le quadruplet $(O,\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est un repère de l'espace $(\mathscr{E})$ .

**c. Technique :**

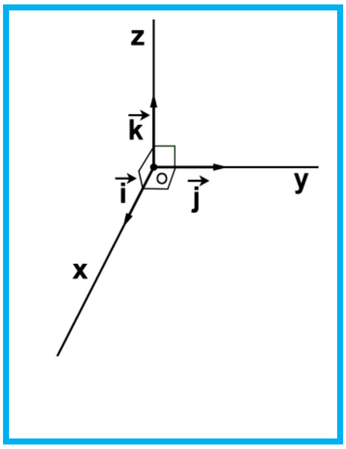
$$\begin{array}{ccccccccccc} & \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} & & \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} & \vec{u} & \vec{v} \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$

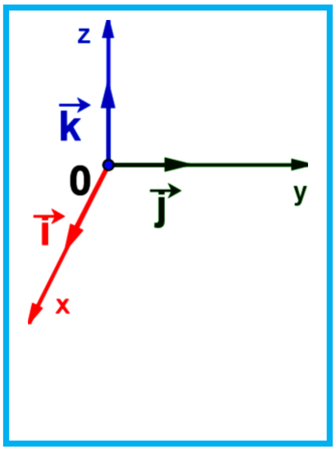
$$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}\begin{matrix} x & x' \\ y & y' \\ z & z' \end{matrix} = (1)+(2)+(3)-(4)-(5)-(6)$$

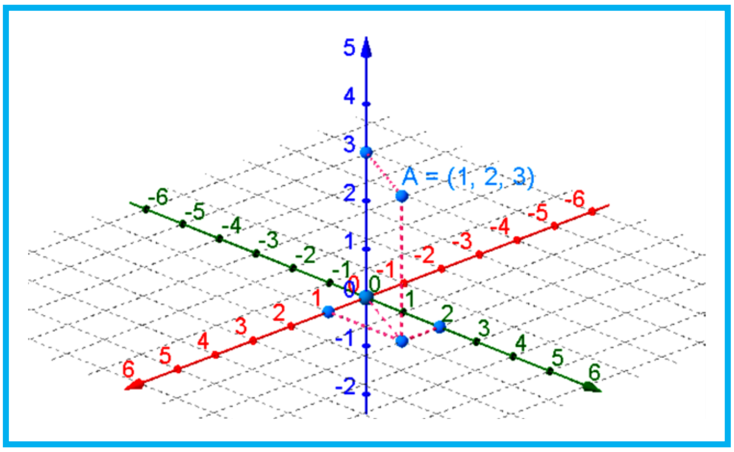
$$(4)\ (5)\ (6) \qquad (1)\ (2)\ (3)$$

**d. Définitions :**

- $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est une base de l'espace $(\mathscr{E})$ équivaut à $\vec{i}$ et $\vec{j}$ et $\vec{k}$ ne sont pas coplanaire $\left(\det(\vec{i},\vec{j},\vec{k}) \neq 0\right)$
- Prenons un point O de l'espace $(\mathscr{E})$ le quadruplé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est appelé repère de $(\mathscr{E})$
- Si $\vec{k}.\vec{j}=\vec{k}.\vec{i}=\vec{j}.\vec{i}=0$ et $\|\vec{j}\|=\|\vec{i}\|=\|\vec{k}\|=1$ alors :
  - ❖ la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est une base orthonormée .
  - ❖ le repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un repère orthonormé .




- Le reste de ce chapitre ; on considère l'espace $(\mathscr{E})$ est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ .
- On prend $\vec{u}(x,y,z)=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ et $\vec{v}(x',y',z')=x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}$ et $M(x,y,z)$ et $A(x_A,y_A,z_A)$ et $B(x_B,y_B,z_B)$ et $C(x_C,y_C,z_C)$ .

## III. Expression analytique de $\vec{u}.\vec{v}$

**a. Activité :**

1. On a : $\vec{u}.\vec{v}=\left(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right).\left(x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}\right)$ on utilise la linéarité du produit scalaire donner $\vec{u}.\vec{v}$ en fonction de $x$ et $y$ et $z$ et $x'$ et $y'$ et $z'$.
2. Ecrire $\|\vec{u}\|$ en fonction de $x$ et $y$ et $z$.
3. Donner la distance $AB=\|\overrightarrow{AB}\|$ en fonction de $x_A$ et $y_A$ et $z_A$ et de $x_B$ et $y_B$ et $z_B$ .
4. Donner la propriété .

**b. Propriété :**

- Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est : $\vec{u}.\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=xx'+yy'+zz'$ .
- La norme du vecteur $\vec{u}$ est : $\|\vec{u}\|=\sqrt{\vec{u}.\vec{u}}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ .
- La distance AB est : $AB=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2+\left(z_B-z_A\right)^2}$ .

**c. Application :**

$\vec{u}(1,2,3)$ et $\vec{v}(5,7,4)$ deux vecteurs et $A(1,5,7)$ et $B(2,9,8)$ deux points de l'espace $(\mathscr{E})$ .

1. Calculons : $\vec{u}.\vec{v}$ et $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$ et $AB$ .

**Correction :** Calculons :

✓ $\vec{u}.\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}5\\7\\4\end{pmatrix}=1\times5+2\times7+3\times4=31$.

✓ $\|\vec{u}\|=\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}$ et $\|\vec{u}\|=\sqrt{5^2+7^2+4^2}=\sqrt{88}$ .

✓ On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2-1\\9-5\\8-7\end{pmatrix}=\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}$ d'où : $AB=\sqrt{1^2+4^2+1^2}=\sqrt{18}$ .

**Conclusion :** $\vec{u}.\vec{v}=31$ et $\|\vec{u}\|=\sqrt{14}$ et $\|\vec{v}\|=\sqrt{88}$ et $AB=\sqrt{18}$ .

## IV. Ensemble des points $M(x,y,z)$ tel que : $\overrightarrow{AM}.\vec{u}=k$ avec $\vec{u}(a,b,c)$ ; $\left(\vec{u}\neq\vec{0}\right)$ :

**a. Propriété :**

$A\left(x_A,y_A,z_A\right)$ est un point et $\vec{u}(a,b,c)$ est un vecteur non nul de l'espace $(\mathscr{E})$ et $k\in\mathbb{R}$ l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace $(\mathscr{E})$ tel que $\vec{u}.\overrightarrow{AM}=k$ est un plan $(P)$ d'équation de la forme : $ax+by+cz+d=0$ .

**b. Application :**

Soient $A(1,1,1)$ et $\vec{u}(0,1,0)$.

1. On détermine $(P)$ ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace $(\mathscr{E})$ tel que $\vec{u}.\overrightarrow{AM}=0$

Correction :

$$M(x,y,z)\in(P)\Leftrightarrow \vec{u}.\overrightarrow{AM}=0$$

On a :

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x-1\\y-1\\z-1\end{pmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow 0.(x-1)+1(y-1)+0(z-1)=0$$

$$\Leftrightarrow y-1=0$$

**Conclusion :** ensemble des points $M(x,y,z)$ de $(\mathscr{E})$ tel que $\vec{u}.\overrightarrow{AM}=0$ est le plan d'équation $(P)$ : $y=1$.

## V. Plan déterminer par un point et un vecteur normal :

### 01. Vecteur normal à un plan :

**a. Définition :**

Tout vecteur $\vec{n}$ non nul sa direction est perpendiculaire au plan $(P)$ s'appelle vecteur normal au plan $(P)$.

**b. Remarques :**

- $\vec{n}$ est normale au plan $P(A,\vec{u},\vec{v})$ alors $\vec{n}\perp\vec{u}$ et $\vec{n}\perp\vec{v}$ .
- Si $\vec{n}$ est normale au plan $(P)$ et passe par A le plan $(P)$ est noté par $P(A,\vec{n})$ .

### 02. Ensemble des points $M(x,y,z)$ tel que $ax+by+cz+d=0$ :

**a. Propriété :**

L'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace $(\mathscr{E})$ qui vérifie $ax+by+cz+d=0$ avec $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ est le plan et le vecteur non nul $\vec{n}(a,b,c)$ est un vecteur normal à ce plan .

**b. Application :**

- Que représente l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace $(\mathscr{E})$ qui vérifie $x+2y-z+4=0$ .

Repense : l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace $(\mathscr{E})$ est le plan $(P)$ tel que :

- ✓ le vecteur $\vec{n}(1,2,-1)$ est normal à $(P)$ .
- ✓ le plan $(P)$ passe par le point $A(0,0,4)$ .
- ✓ donc $(P)=P(A,\vec{n})$ .

### 03. Ensemble des points $M(x,y,z)$ tel que $\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0$ :

**a. Propriété :**

$\vec{n}(a,b,c) \neq \vec{0}$ est un vecteur non nul et $A(x_A, y_A, z_A)$ est un point de l'espace $(\mathscr{E})$.

L'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace $(\mathscr{E})$ qui vérifie : $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$ est le plan $(P)$ qui passe par A et le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal à ce plan ( c.à.d. $P(A,\vec{n})$ ).

Le plan $(P)$ a pour équation cartésienne de la forme $ax+by+cz+d=0$ avec $d = -(ax_A + by_A + cz_A)$

**b. Application :**

On détermine une équation cartésienne du plan $(P)$ passant par le point $A(2,1,-3)$ et $\vec{n}(1,1,2)$ est un vecteur normal à $(P)$.

Soit $M(x,y,z)$ un point de l'espace $(\mathscr{E})$.

On a : $M(x,y,z) \in (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \\ z+3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\times 1 + (y-1)\times 1 + (z+3)\times 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x+y+2z+3=0$$

**Conclusion :** équation cartésienne de $(P)$ est $(P)$ : $x+y+2z+3=0$.

**c. Propriété :**

tout plan $P\left(A,\vec{n}(a,b,c)\right)$ a pour équation cartésienne de la forme $ax+by+cz+d=0$ la réciproque avec $(a,b,c) \neq (0,0,0)$.

**d. Preuve :**

On montre que : le vecteur $\vec{n}(a,b,c)$ est normal à ce plan $(P)$.

On a : $M(x,y,z) \in (P) \Leftrightarrow ax+by+cz+d=0 \quad ; (1)$

$A(x_0,y_0,z_0) \in (P) \Leftrightarrow ax_0+by_0+cz_0+d=0 \quad ; (2)$

La différence entre $(1)$ et $(2)$ on obtient :

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \vec{n}$$

D'où : $\vec{n}(a,b,c)$ est normal à ce plan.

**e. Application :**

1. On donne l'équation du plan $P\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ et le point $A(0,0,m)$ avec $m\in\mathbb{R}$ .

**1ère méthode :**

$$M(x,y,z)\in(P)\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{i} \text{ et } \vec{j} \text{ sont coplanaires}$$

$$\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AM},\vec{i},\vec{j}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-0 & 1 & 0 \\ y-0 & 0 & 1 \\ z-m & 0 & 0 \end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow x\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}-y\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}+(z-m)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow 0-0+(z-m)=0$$

$$\Leftrightarrow z-m=0$$

**Conclusion :** équation du plan $P\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ est $P\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ : $z=m$.

**2ième méthode :**

Puis que le repère est orthonormé donc $\vec{k}(0,0,1)$ est normal au plan $P\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ donc équation de $P\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ est de la forme $0\times x+0\times y+1\times z+d=0$ ou encore $z+d=0$

On sait que : $A(0,0,m)\in P\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)\Leftrightarrow m+d=0$ donc $d=-m$.

**Conclusion :** équation du plan $P\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ est $P\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ : $z=m$.

**3ième méthode :**

Puis que le repère est orthonormé donc $\vec{k}(0,0,1)$ est normal au plan $P\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

$$M(x,y,z)\in(P)\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{k}=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \\ z-m \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-0)\times 0+(y-0)\times 0+(z-m)\times 1=0$$

$$\Leftrightarrow z-m=0$$

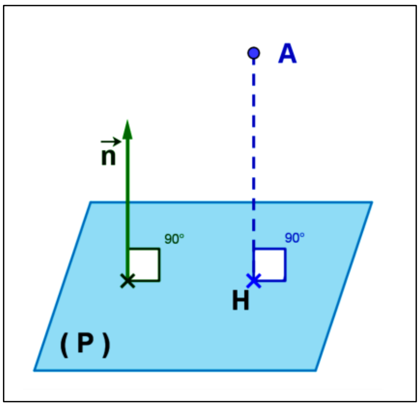
**Conclusion :** équation du plan $P\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ est $P\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ : $z=m$.

## VI. Distance d'un point à un plan :

**a. Définition :**

$(P)$ est un plan et $A$ est un point de l'espace $(\mathcal{E})$ et $H$ est la projection orthogonale de $A$ sur le plan $(P)$ la distance du point $A$ au plan $(P)$ est $AH$ et on note $AH=d(A,(P))$ .

**b. Exemple :**




**c. Propriété :**

$(P)$ est un plan et $A(x_A, y_A, z_A)$ est un point de l'espace $(\mathcal{E})$ tel que $(P)$ a pour équation $(P) : ax + by + cz + d = 0$.

La distance du point $A$ au plan $(P)$ est $AH = d(A,(P)) = \dfrac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ .

**d. Preuve :**

On considère $H(x_H, y_H, z_H)$ $H$ est la projection orthogonale de $A$ sur le plan $(P)$ .

- On sait que : le vecteur $\vec{n}(a,b,c)$ est normal à ce plan $(P)$ ( $\vec{n} \perp (P)$ ) $(1)$
- $H$ est la projection orthogonale de $A$ sur le plan $(P)$ donc $\overrightarrow{AH} \perp (P)$. $(2)$
- $H \in (P) \Leftrightarrow ax_H + by_H + cz_H + d = 0$ ; donc : $ax_H + by_H + cz_H = -d$.
- D'après $(1)$ et $(2)$ on obtient $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires , d'où $\left|\cos\left(\overrightarrow{AH}, \vec{n}\right)\right| = 1$ et

$$\left|\overrightarrow{AH}.\vec{n}\right| = AH\left\|\vec{n}\right\|\left|\cos\left(\overrightarrow{AH}, \vec{n}\right)\right| = AH\left\|\vec{n}\right\| \text{ on obtient } \left|\overrightarrow{AH}.\vec{n}\right| = AH\left\|\vec{n}\right\| \quad (4)$$

- D'autre part : le produit scalaire est :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AH}.\vec{n} &= \begin{pmatrix} x_H - x_A \\ y_H - y_A \\ z_H - z_A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\
&= a(x_H - x_A) + b(y_H - y_A) + c(z_H - z_A) \\
&= ax_A + by_A + cz_A - \Big(\underbrace{ax_H + by_H + cz_H}_{-d}\Big) \\
&= ax_A + by_A + cz_A + d
\end{aligned}$$

D'où : $\left|\overrightarrow{AH}.\vec{n}\right| = |ax_A + by_A + cz_A + d| \quad (3)$

D'après $(3)$ et $(4)$ on obtient $AH\left\|\vec{n}\right\| = |ax_A + by_A + cz_A + d|$. D'où : $AH = \dfrac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\left\|\vec{n}\right\|}$.

**e. Application :**

On considère le plan d'équation $(P)\,x+3y-5z+1=0$.

1. Est –ce que : $A(1,1,1)\in(P)$

   On a : $(P)\,1+3\times1-5\times1+1=4-5+1=0$ d'où : $A(1,1,1)\in(P)$

2. Donner la distance $d(A,(P))$

   **1ère méthode :**

   ✓ Puis que $A(1,1,1)\in(P)$ donc la projection orthogonale de $A$ sur le plan $(P)$ est $A=H$

   Donc $AH=AA=0$ donc $d(A,(P))=0$ .

   **Conclusion :** la distance $d(A,(P))=0$.

   **2ième méthode :**

   ✓ On applique la propriété :

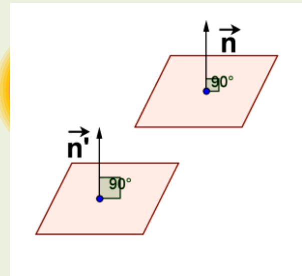
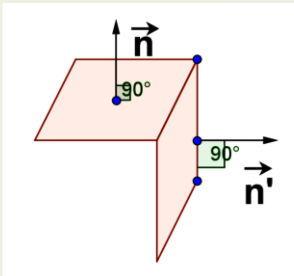
$$AH=d(A,(P))=\frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\left|\frac{1+3\times1-5\times1+1=4-5+1}{\sqrt{1^2+3^2+(-5)^2}}\right|=\left|\frac{0}{35}\right|=0$$

   **Conclusion :** la distance $d(A,(P))=0$

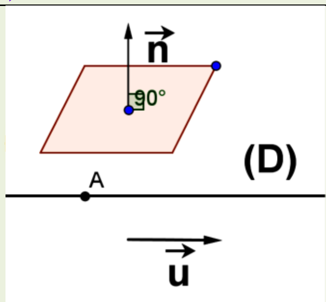
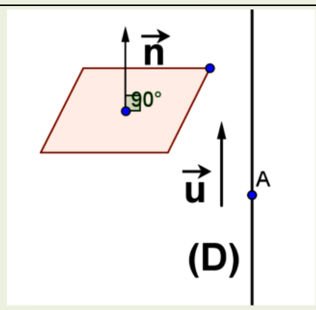
## VII. Parallélisme et orthogonalité des droites et des plans :

### 01. Parallélisme et orthogonalité de deux plans :

**a. Propriétés :**

| $(P_1):ax+by+cz+d=0$ et $(P_2):a'x+b'y+c'z+d'=0$ | | |
|---|---|---|
| $(P_2)\parallel(P_1)\Leftrightarrow$ ( $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont colinéaires)<br>$(P_2)\parallel(P_1)\Leftrightarrow \frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ ( non nuls )<br>$(P_2)\parallel(P_1)\Leftrightarrow \Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$ ($\vec{n}$ et $\vec{n}'$) | $(P_2)\parallel(P_1)\Leftrightarrow \vec{n}'=\alpha\vec{n}$<br><br> | $(P_2)\perp(P_1)\Leftrightarrow \vec{n}'.\vec{n}=0$<br><br> |

### 02. Parallélisme et orthogonalité d'une droite et un plan :

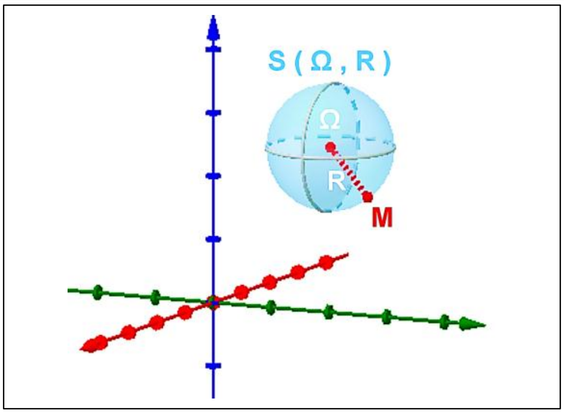
| $P(B,\vec{n})$ et $D(A,\vec{u})$ et $(P):ax+by+cz+d=0$ | | |
|---|---|---|
| $(D)\parallel(P)\Leftrightarrow \vec{u}.\vec{n}=0$<br>$(D)\perp(P)\Leftrightarrow$ ( $\vec{n}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires ) | <br> | <br> |

# VIII. Etude analytique du sphère :

## 01. Sphère :

**a. Définition :**

$\Omega$ est un point donné de l'espace $(\mathscr{E})$ et $R>0$ l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace $(\mathscr{E})$ tel que $\Omega M = R$ s'appelle le sphère de centre $\Omega$ et de rayon $R$ on note $(S)$ ou $S(\Omega,R)$ .




## 02. Equation cartésienne d'une sphère :

**a. Définition propriété :**

Equation cartésienne de $(S)=S(\Omega(a,b,c),r)$ est : $M(x,y,z)\in(S)\Leftrightarrow \Omega M = R$ ou $(x-a)^2+(y-a)^2+(z-a)^2=R^2$ ou bien : $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ avec $d=a^2+b^2+c^2-R^2$

**b. Application :**

On donne l'équation cartésienne du sphère $S(O(0,0,0),1)$

on a : $(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2=1^2 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2=1$.

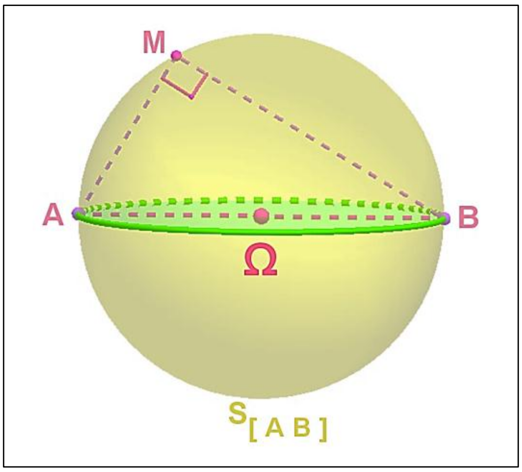
**Conclusion :** l'équation cartésienne du sphère $S(O(0,0,0),1)$ est $x^2+y^2+z^2=1$ .

## 03. Equation cartésienne du sphère déterminé par un diamètre $[AB]$ .

**a. Définition :**

$\Omega$ est le milieu de $[AB]$; $[AB]$ est un diamètre du sphère $(S)$. donc A et B appartiennent à $(S)$.

On dit la sphère de diamètre $[AB]$ on note $(S)$ ou $S_{[AB]}$ .



**b. Propriété :**

Equation cartésienne de $S_{[AB]}$ est : $M(x,y,z)\in S_{[AB]} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$

ou bien $(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)+(z-z_A)(z-z_B)=0$ .

**c. Preuve :**

Soit $I$ le milieu de $[AB]$ ( centre du sphère $(S)$ ) .

On a : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})=0$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MI}^2+\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}=0$$
$$\Leftrightarrow MI^2+\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB})+\overrightarrow{IA}.(-\overrightarrow{IA})=0$$
$$\Leftrightarrow MI^2+\overrightarrow{MI}.\vec{0}-IA^2=0$$
$$\Leftrightarrow MI^2=IA^2$$
$$\Leftrightarrow MI=IA$$
$$\Leftrightarrow M\in S_{(I,r=IA)}$$

**Conclusion :** l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace $(\mathscr{E})$ qui vérifie $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ c'est le sphère $(S)$ de centre $I$ le milieu de $[AB]$ et de rayon $r=IA=\frac{AB}{2}$ ou encore le sphère $S_{[AB]}$ de diamètre $[AB]$ .

**d. Exemple :** Soient $A(0,1,0)$ et $B(0,-1,0)$ deux points de l'espace $(\mathscr{E})$ .

On détermine l'équation cartésienne du sphère $S_{[AB]}$ :

$M(x,y,z)\in S_{[AB]} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ ; $(\text{ou } \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0)$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y-1 \\ z \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y+1 \\ z \end{pmatrix}=0$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2=1$$

**Conclusion :** l'équation cartésienne du sphère $S_{[AB]}$ est $S_{[AB]}: x^2+y^2+z^2=1$.

## 04. L'ensemble des $M(x,y,z)$ de l'espace $(\mathscr{E})$ tel que $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$ :

**a. Propriété :**

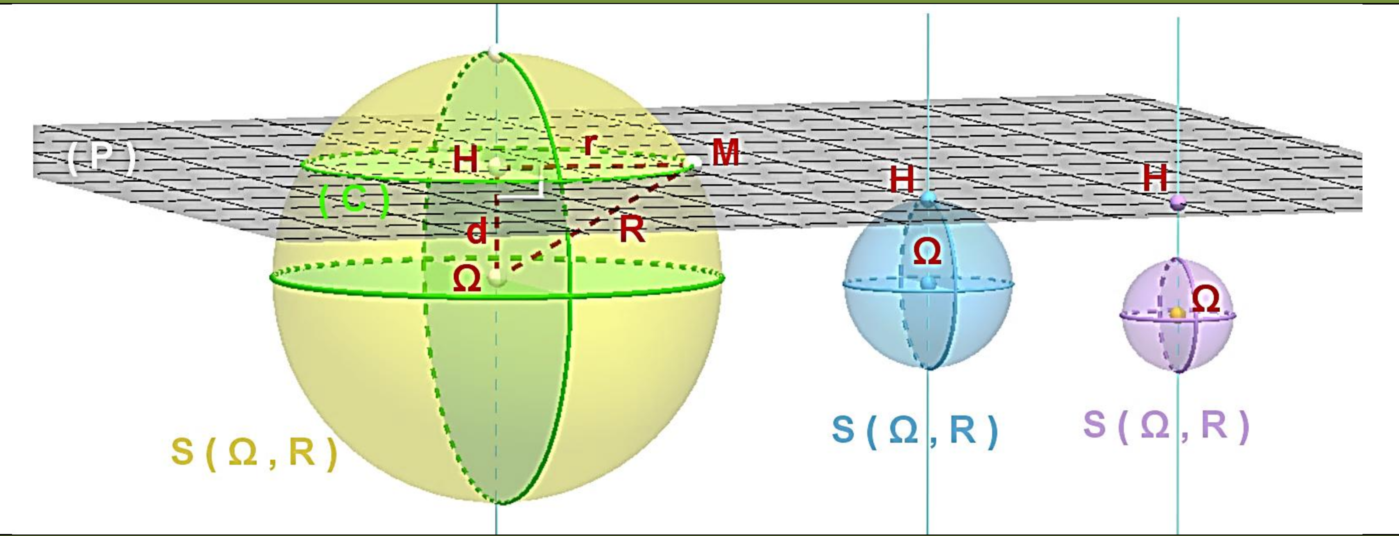
L'ensemble des $M(x,y,z)$ de l'espace $(\mathscr{E})$ tel que $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$ avec a et b et c et d de $\mathbb{R}$ on pose $A=a^2+b^2+c^2-4d$ est :

- $(E)=\varnothing$ si $A<0$ .
- $(E)=\left\{\Omega\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2},-\frac{c}{2}\right)\right\}$ si $A=0$ .
- Le Sphère $(E)=S\left(\Omega\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2},-\frac{c}{2}\right),R=\frac{\sqrt{A}}{2}\right)$ si $A>0$ .

## IX. Positions relatives d'une sphère et un plan :

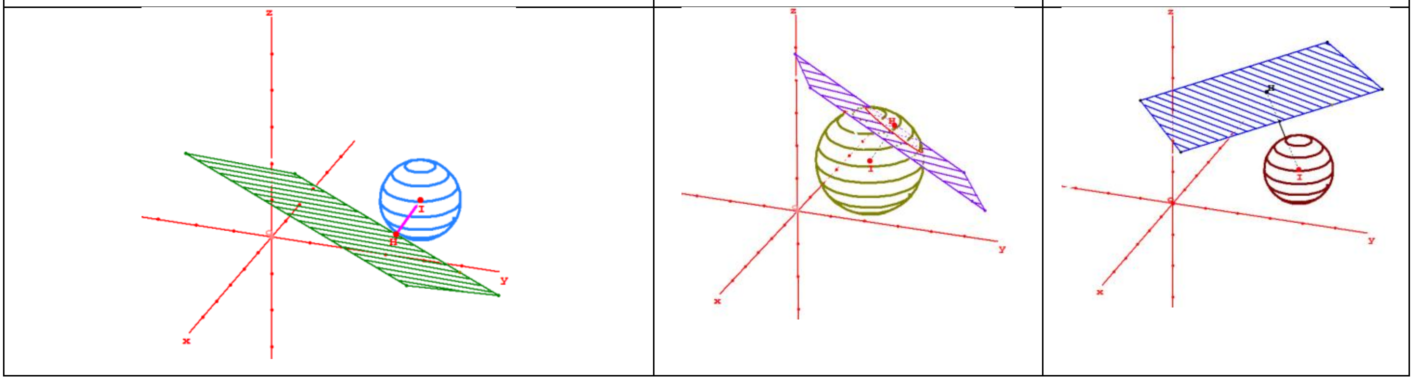
### 01. Positions et les schémas et théorème:

**a. Intersection d'un plan $(P)$ et une sphère $(S)$**




**b. Théorème :**

| | | |
|---|---|---|
| $3^{ième}$ CAS : $d=\Omega H<R$ on a $(P)\cap(S)=(C)$ $(P)$ coupe $(S)$ suivant le cercle de centre H et de rayon $R_C=\sqrt{{R_S}^2-d^2}$ $R_C=r$ et $R_S=R$ | $2^{ième}$ CAS : $d=\Omega H=R$ on a $(P)\cap(S)=\{H\}$ $(P)$ et $(S)$ sont tangents en H avec $(H\Omega)\perp(P)$ | $1^{ER}$ CAS : $d=\Omega H>R$ on a $(P)\cap(S)=\varnothing$ $(P)$ et $(S)$ son disjoints |



**a. Remarques :**

- H est la projection de $\Omega$ sur $(P)$ et $d=\Omega H=d(\Omega,(P))=\dfrac{|ax_\Omega+by_\Omega+cz_\Omega+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ .
- on détermine H par l'intersection du plan $(P)$ et la droite $(D)$ perpendiculaire au plan passant par $\Omega$
- Vecteur normal $\vec{n}$ au plan $(P)$ est un vecteur directeur de la droite $(D)$ .

### 02. Equation du plan tangent à une sphère :

**a. Théorème :**

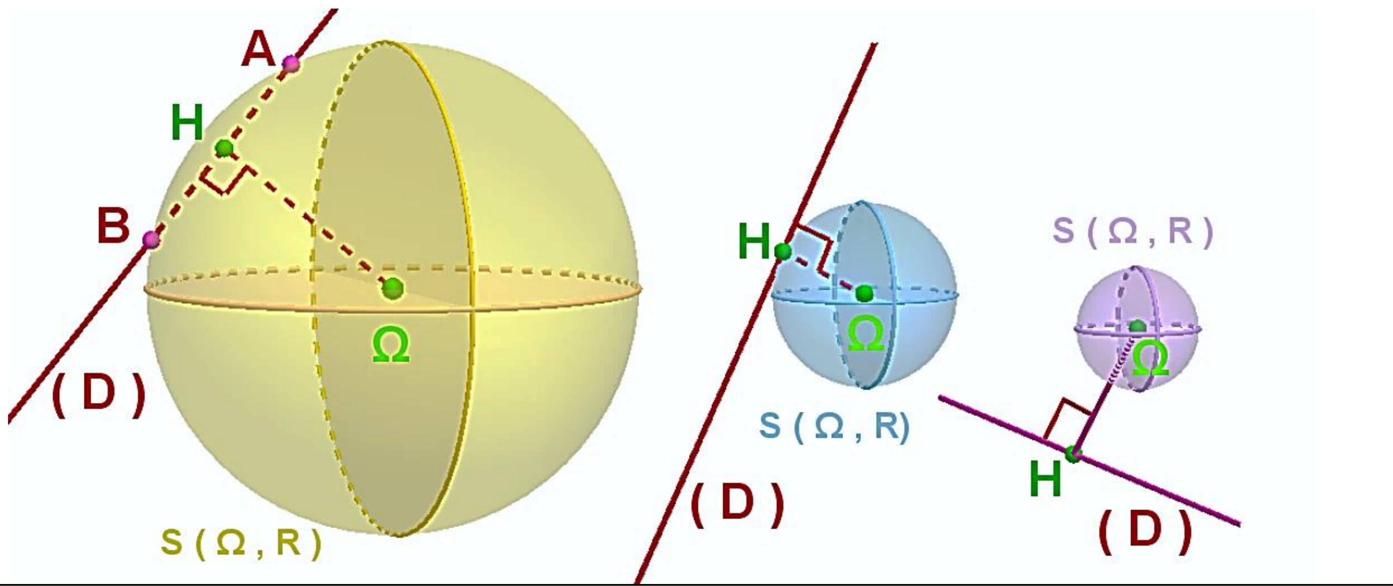
par un point A quelconque d'une sphère $(S)$ il existe un et un seul plan $(Q)$ tangente au sphère $(S)$ au point A . l'équation de $(Q)$ est : $M\in(Q)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{A\Omega}=0$

## X. Positions relatives d'une sphère et une droite :

### 01. Positions et les schémas et théorème :

**a. Intersection d'une droite $(D)$ et une sphère $(S)$**

| 3ième CAS : | 2ième CAS | 1ER CAS : |
|---|---|---|




**b. théorème**

| 3ième CAS : $(D)\cap(S)=\{A,B\}$ | 2ième CAS / $(D)\cap(S)=\{H\}$ | 1ER CAS : $(D)\cap(S)=\varnothing$ |
|---|---|---|
| $(D)$ coupe $(S)$ en deux points A et B<br>( Deux points mais pas le segment $[AB]$ ) | $(D)$ et $(S)$ sont tangents en H avec $(H\Omega)\perp(D)$ | $(P)$ et $(S)$ son disjoints |
| CONDITION : $d=\Omega H<R$ | CONDITION : $d=\Omega H=R$ | CONDITION : $d=\Omega H>R$ |

| | |
|---|---|
| REMARQUES | • H est la projection de $\Omega$ sur $(D)$ .<br>• Si $(D)=D(K,\vec{u})$ on a $d=\Omega H=\dfrac{\left\|\overrightarrow{K\Omega}\wedge\vec{u}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|}$ ( voir chapitre produit vectoriel ) .<br>• Si $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ et $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}$ .<br>on a :<br>$\vec{u}\wedge\vec{v}=\left(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right)\wedge\left(x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}\right)$<br>$=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$<br>$=\Delta_x\vec{i}-\Delta_y\vec{j}+\Delta_z\vec{k}=\begin{vmatrix}y & y'\\z & z'\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}x & x'\\z & z'\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}x & x'\\y & y'\end{vmatrix}\vec{k}$<br>• Exemple : $\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}0 & -1\\1 & 1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & 2\\1 & 1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & 2\\0 & -1\end{vmatrix}\vec{k}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ |