

1BAC SM BIOF

Dénombrement

Exercice 1

Pour A, B deux ensembles de E on note $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Pour E un ensemble fini, montrer :

$$\text{Card } A \Delta B = \text{Card } A + \text{Card } B - 2\text{Card } A \cap B.$$

Exercice 2

En utilisant la fonction $x \mapsto (1+x)^n$, calculer :

$$\sum_{k=0}^n C_n^k ; \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k ; \quad \sum_{k=1}^n k C_n^k ; \quad \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} C_n^k.$$

Exercice 3

En utilisant la formule du binôme, démontrer que :

1. $2^n + 1$ est divisible par 3 si et seulement si n est impair ;
2. $3^{2n+1} + 2^{4n+2}$ est divisible par 7.

Exercice 4 **I

On part du point de coordonnées $(0,0)$ pour rejoindre le point de coordonnées (p,q) (p et q entiers naturels donnés) en se déplaçant à chaque étape d'une unité vers la droite ou vers le haut. Combien y a-t-il de chemins possibles ?

Exercice 5

On considère les mains de 5 cartes que l'on peut extraire d'un jeu de 52 cartes.

1. Combien y a-t-il de mains différentes ?
2. Combien y a-t-il de mains comprenant exactement un as ?
3. Combien y a-t-il de mains comprenant au moins un valet ?
4. Combien y a-t-il de mains comprenant (à la fois) au moins un roi et au moins une dame ?

Exercice 6 Permutations

Combien y a-t-il de bijections f de $\{1, \dots, 12\}$ dans lui-même possédant :

1. la propriété : n est pair $\Rightarrow f(n)$ est pair ?
2. la propriété : n est divisible par 3 $\Rightarrow f(n)$ est divisible par 3 ?
3. ces deux propriétés à la fois ?
4. Reprendre les questions précédentes en remplaçant *bijection* par *application*.

Exercice 7

Soit E un ensemble à n éléments, et $A \subset E$ un sous-ensemble à p éléments. Quel est le nombre de parties de E qui contiennent un et un seul élément de A ?