

TD1 Dénombrement

prof: ATMANI NAJIB

1BAC SM BIOF

Exercice1 : Soient A et B et C trois ensembles finis.

1) Calculer $card(A - B)$ et $card(A \Delta B)$ en fonction de $card(A)$ et $card(B)$ et $card(A \cap B)$

2) Montrer que

$$card(A \cup B \cup C) = card(A) + card(B) + card(C)$$

$$- card(A \cap B) - card(A \cap C) + card(A \cap B \cap C)$$

Exercice2 : Dans un lycée de 100 élèves, 53 pratiquent le football et 15 le football et basket-ball et 20 pratiquent seulement basket-ball sans football

1) Quelle est Le nombre d'élèves qui pratiquent le basket-ball ?

2) Quelle est Le nombre d'élèves qui pratiquent au moins un sport ?

3) Quelle est Le nombre d'élèves qui ne pratiquent pas Les deux sports ?

Exercice3 : Dans une compétition sportive groupant 10 équipes chaque équipe doit rencontrer toutes les autres équipes une seule fois combien doit-on organiser de matches ?

Exercice4 : Dans une classe de 25 élèves, on compte 8 garçons et 17 filles.

On doit élire deux délégués

1) Quel est le nombre de choix possibles ?

2) Quel est le nombre de choix si l'on impose un garçon et une fille ?

3) Quel est le nombre de choix si l'on impose 2 filles ?

Exercice5 : Une urne contient 5 boules rouges, 4 noires, 3 vertes.

1) On tire simultanément trois boules de l'urne déterminer :

a) le nombre de tirages possibles

b) le nombre pour obtenir trois boules rouges

c) le nombre pour obtenir trois boules de même couleur

d) d'obtenir trois boules de couleurs différentes 2 à 2

e) pour obtenir deux boules rouges exactement

f) obtenir au moins une boule rouge

g) d'obtenir deux boules vertes et une noire ;

2) reprendre les mêmes questions si On tire

Successivement trois boules de l'urne sans remise

3) reprendre les mêmes questions si On tire

Successivement trois boules de l'urne avec remise

Exercice6 : On rappelle qu'une anagramme d'un mot

est un mot qui contient les mêmes lettres

(éventuellement répétées le même nombre de fois).

Exemple : REVISE et SERVIE sont des anagrammes de EVIERS, on considère que ESEIVR en est une autre, bien que ce mot n'ait aucun sens.

1. Combien CHERS a-t-il d'anagrammes ?

2. Combien CHERE a-t-il d'anagrammes ?

3. Combien CHERCHER a-t-il d'anagrammes ?

4. Combien RECHERCHER a-t-il d'anagrammes ?

Exercice7 : Une agence de voyages propose un circuit touristique comprenant quatre des douze capitales de la Communauté économique européenne (CEE). Pour définir un circuit, on suppose que chaque capitale n'est visitée qu'une fois et on tient compte de l'ordre de visite de ces capitales ; par exemple, le circuit : " Paris, Madrid, Rome, Athènes " diffère du circuit : " Athènes, Rome, Paris, Madrid ".

1) Combien y a-t-il de circuits différents ?

2) Quelle est le nombre de circuits qui commence de Paris

3) Si le circuit commence à Paris, quelle est le nombre de circuits pour que Madrid et Rome fassent partie du circuit ?

Exercice8 : Soit l'ensemble $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$

1) Combien de nombres de 4 chiffres différents deux à deux on peut former avec les éléments de E ?

2) Combien de nombres pair de 4 chiffres différents deux à deux on peut former avec les éléments de E ?

3) Combien de nombres pair de 4 chiffres différents deux à deux on peut former avec les éléments de E tel que le chiffre des dizaines est impair ?

4) Combien de nombres de 2 chiffres qu'on peut former avec les éléments de E ?

5) Combien de parties de E de 3 éléments qu'on peut former ?

Exercice 9 : 1) On considère 7 points dans le plan :

A_1 et A_2 et A_3 et A_4 et A_5 et A_6 et A_7

On suppose que toujours 3 quelconque sont non alignés

a) Quelle est le nombre de segments $[A_i A_j]$ $i \neq j$ qu'on peut former en utilisant les 7 points ?

b) Quelle est le nombre de triangles qu'on peut former en utilisant les 7 points

c) Quelle est le nombre de couples $(A_i; A_j)$ $i \neq j$ qu'on peut former en utilisant les 7 points ?

2) on recherche le nombre de diagonales d'un polygone à n sommets.

a) tracer et déterminer le nombre de diagonales d'un polygone dans les cas suivants : $n = 4$ et $n = 5$ et $n = 6$

b) Quelle est le nombre des côtés d'un polygone à n sommets ?

c) en déduire le nombre de diagonales d'un polygone à n sommets.

d) quelle est le polygone tel que le nombre de diagonales Est égale au nombre des côtés ?

e) quelle est le polygone tel que le nombre de diagonales Est égale 1325 ?

Exercice10 : 1) donner la formule du binôme

2) Calculer : $(a+b)^6$ et $(1-x)^5$

Exercice11 :

1) calculer $\sum_{k=0}^n C_n^k$ de deux façons différentes

2) calculer $\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k$

3) en déduire : $\sum_{k=0}^n C_n^{2k} = \sum_{k=0}^n C_n^{2k+1} = 2^{n-1}$

Exercice12 : 1) Montrer par récurrence que $\forall n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^n k \times k! = (n+1)! - 1$$

2) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad C_{2n}^n \leq 4^n$

Exercice13 : $n \geq 2$ on dispose de deux urnes U et V
L'urne U contient 3 boules blanches et n boules noires
et L'urne V contient n boules blanches et 3 boules noires
et on choisit au hasard une urne puis on tire

Successivement sans remise 2 boules

1) Dresser un arbre des choix

2) Combien y a-t-il de façon de tirer 2 boules de même couleur ? De différentes couleurs

Exercice14 : 1) soit la fonction définie \mathbb{R} par :

$$f(x) = (x+1)^n$$

vérifier que :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n$$

2) calculer $f'(x)$ par deux méthodes différents

$$\text{et déduire que : } \sum_{k=0}^n k C_n^k = n 2^{n-1}$$

Exercice15 : on dispose de deux urnes U_1 et U_2

L'urne U_1 contient 4 boules rouges et 3 boules vertes

et L'urne U_2 contient 5 boules rouges et 2 boules vertes

et une boule jaune on tire simultanément deux boules de l'urne U_1 et une boule de l'urne U_2

1) Combien y a-t-il de tirages possibles des trois boules

2) Quel est le nombre de tirages dans les cas suivants :

a) tirages de trois boules rouges

b) tirages d'une boule verte seulement

c) tirages de deux boules vertes et une boule jaune

d) tirages d'une boule de chaque couleur

Exercice16 : $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$ tq $0 \leq p \leq n$

Montrer que : $p C_n^p = n C_{n-1}^{p-1}$ et calculer $\sum_{k=0}^n k C_n^k$

Exercice17 : $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$ tq $0 \leq p \leq n$

1) Montrer que : $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$

2) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation suivante :

$$x^2 - C_n^p x + C_{n-1}^{p-1} C_{n-1}^p = 0$$

Exercice18 : $n \in \mathbb{N}$ Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \frac{C_n^{k+1}}{C_n^k} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Exercice19 : $n \in \mathbb{N}$ et $4 \leq n$ Montrer que :

$$C_{C_n^2}^2 = 3 C_{n+1}^4$$

Exercice20 : $p \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \leq n$

Montrer que : $A_n^p = A_{n-1}^p + p A_{n-1}^{p-1}$

Exercice37 : Déterminer le nombre entier $3 \leq n$ tel que :

$$C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 = 5n$$

Exercice21 : déterminer le couple $(n; p)$ solution du

$$\text{système suivant : } \begin{cases} C_n^p = C_n^{p+1} \\ 4C_n^p = 5C_n^{p-1} \end{cases}$$

Exercice22 : $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ Montrer que : $2^{n-1} \leq n!$

Exercice23 : A l'occasion d'une compétition sportive groupant 15 athlètes on attribue une médaille le d'or une d'argent et une de bronze

Combien y-a-t-il de distributions possibles ?

Exercice24 : Dans une classe de 20 élèves, on compte 12 garçons et 8 filles.

On doit élire 5 délégués

1) Quel est le nombre de choix possibles ?

2) Quel est le nombre de choix de délégués de même sexe ?

3) Quel est le nombre de choix de délégués de sexe différents ?

4) Quel est le nombre de choix de délégués qui contient 3 garçons et 2 filles ?

5) Quel est le nombre de choix qui contient au plus une fille ?

6) On suppose que dans cette classe il existe un élève x et sa sœur y

Exercice25 : Dans une urne se trouvent 10 boules : 3 rouges numérotées 1 ; 1 ; 2 et 4 vertes numérotées 3 ; 2 ; 2 ; 1 et trois bleus numérotées 1 ; 2 ; 3

On en tire 3 boules successivement avec remise

a. Combien de tirages possibles ?

b. Combien de tirages possibles de 3 boules de même couleur ?

c. Combien de tirages possibles d'une boule rouge seulement ?

d. Combien de tirages possibles de façon que la somme des chiffres des boules tirer est 5 ?

e. Combien de tirages possibles de 3 boules qui portent le même chiffre ?