Un peu de dénombrement pur

Exercice 1 — A la cantine du lycée, il y a le choix entre 3 entrées, 2 plats et 4 desserts. Combien de menus (se composant d'une entrée, d'un plat et d'un dessert) sont possibles.

Exercice 2 — On considère l'ensemble $E = \{a, b, c, d\}$. Ecrire :

1. Les combinaisons de 3 éléments de E.
2. Les arrangements de 3 éléments de E.
3. Les trois-listes d'éléménts de E (on pourra ne pas tous les écrire).

Exercice 3 — Une anagramme est un mot (ayant ou non un sens) formé en changeant de place les lettres d'un autre mot. Combien d'anagrammes peut-on former à partir des prénoms : NICOLAS, SOLENE, CLEMENCE ?

Exercice 4 — On effectue cinq tirages d'une boule, successivement et avec remise, dans une urne contenant neuf boules numérotées de 1 à 9.

1. Combien y-a-t-il de tirages possibles ?
2. Dénombrer l'ensemble des tirages contenant :
   a) (Exactement) deux fois la boule 2. **b)** Au moins une fois la boule 9. **c)** Trois fois la boule 3 et une fois la boule 1.
3. **a)** Quel est le nombre de tirages tels que la deuxième boule tirée est la boule 1 ?
   b) Quel est le nombre de tirages tels que la boule 1 ait été tirée une deuxième fois en position trois ?

Exercice 5 — Dans une bibliothèque, vingt livres sont exposés sur une étagère rectiligne et répartis au hasard. Parmi ces vingt livres, quatre sont du même auteur A, les autres étant d'auteurs tous différents. Déterminer le nombre de façon de ranger ces vingts livres pour que les quatre livres de A se retrouvent côte à côte.

Exercice 6 *Identité de Vandermonde.* — Une urne contient m boules rouges et n boules blanches.

1. En calculant de deux manières différentes le nombre de tirages de k boules de l'urne, montrer que $\sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j}\binom{n}{k-j} = \binom{n+m}{k}$.
2. En déduire $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Exercice 7 — Le directeur d'un zoo dispose de n cages pour y enfermer les animaux malades. Par mesure d'hygiène il choisit de mettre au plus un animal par cage et de ne jamais remplir deux cages voisines. On s'intéresse au nombre u_n de manières différentes de placer des animaux dans ces n cages en suivant cette règle.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
2. Exprimer u_n en fonction de n. (On conviendra que $u_0 = 1$).

Dénombrement en probabilité

Exercice 8 — Une urne contient neuf boules distinctes : deux vertes, trois blanches et quatre rouges. On tire au hasard, successivement et sans remise quatre boules de l'urne.

1. Préciser l'univers associé à cette expérience, ainsi que son cardinal.
2. Quelle est la probabilité d'obtenir : **a)** Au moins une boule verte ? **b)** Uniquement des boules d'une même couleur ?
   c) Deux boules vertes, une rouge et une blanche sachant que l'on a tiré au moins une boule verte ?
3. Reprendre les questions 1 et 2 lorsque le tirage est simultané, puis lorsque les tirages sont successifs et avec remise.

Exercice 9 — Un joueur de poker reçoit une « main » de cinq cartes choisies au hasard dans un jeu de 32 cartes.

1. Préciser l'univers associé à cette expérience ainsi que son cardinal.
2. Quelle est la probabilité d'obtenir : **a)** Un carré ? **b)** Un full ? **c)** Un brelan (fulls exclus) ?
   d) Seulement une paire (et trois autres cartes de hauteurs différentes et différentes entre elles) ?
   e) Exactement deux paires ?

Pour les non initiés : dans un jeu de 32 cartes, il y a huit « hauteurs » qui sont 7, 8, 9, 10, Valet, Dame, Roi, As, de quatre « couleurs » qui sont Pique, Cœur, Carreau et Trèfle.

Un carré = quatre cartes de même hauteur
Un brelan = trois cartes de même hauteur (et pas quatre)
Une paire = deux cartes de même hauteur (et pas trois)
Un full = un brelan et une paire

Exercice 10 — On considère une classe de N élèves. On suppose qu'aucun élève n'est né un 29 février et que, pour chaque élève, tous les autres jours de l'année ont la même probabilité d'être le jour de son anniversaire. Quelle est la probabilité qu'au moins deux élèves soient nés le même jour ?

Exercice 11 — Dans une urne se trouvent n boules rouges et n boules blanches. On tire deux par deux, sans remise, les boules jusqu'à vider l'urne. Quelle est la probabilité que l'on tire deux boules de chaque couleur à chaque tirage ?

PROF: ATMANI NAJIB

Dénombrement – Corrigé de quelques exercices

Exercice 6 — 1. On compte de deux façons différentes le nombre de tirages de k boules :

- *1re façon*. On tire simultanément k boules dans une urne contenant $n+m$ boules. On sait qu'il y a en tout $\binom{n+m}{k}$ possibilités.
- *2e façon*. On procède par disjonctions de cas. Pour $j \in [\![0,k]\!]$ fixé, le nombre de tirages de k boules formés de j boules rouges et $k-j$ blanches est de $\binom{k}{m} \times \binom{k-j}{n}$.

  Le nombre total de tirages de k boules est donc $\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{m}\binom{k-j}{n}$.

On en déduit que $\binom{n+m}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{m}\binom{k-j}{n}$.

2. On applique la formule dans le cas $k = m = n$. Cela donne $\binom{2n}{n} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}\binom{n}{n-j} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}\binom{n}{j} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2$.

Exercice 7 — 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour placer les animaux dans $n+2$ cases, procédons à une disjonction de cas suivant la composition de la première cage :

- *1re possibilité : la première case est vide*. Dans ce cas il y a u_{n+1} façons de placer les animaux dans les $n+1$ cages restantes.
- *2e possibilité : la première case est pleine*. Dans ce cas la deuxième cage est vide selon le protocole. Pour remplir le n cages suivantes, il y a donc u_n possibilités.

On en déduit que $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est récurrente linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique associée s'écrit $x^2 - x - 1 = 0$.

Elle est de discriminant $5 > 0$ donc admet deux racines réelles $r_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Il existe donc $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$.

Pour $n = 0$ on a $u_0 = 1$ (par convention). Pour $n = 1$ on a $u_1 = 2$ (la cage peut être vide ou pleine).

On obtient $\begin{cases} \lambda + \quad \mu = 1 \\ \lambda r_1 + \mu r_2 = 2 \end{cases}$ et donc $\begin{cases} \lambda + \qquad \mu = 1 \\ \qquad \mu(r_2 - r_1) = 2 - r_1 \end{cases}$.

Tous calculs faits, on obtient $\mu = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$ et $\lambda = \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$.

Exercice 11 — Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on note E_i : « On obtient deux boules de couleurs différentes au i^e tirage ».

On cherche donc $P(\bigcap_{i=1}^{n} E_i)$. Par la formule des probabilités totales on a $P(\bigcap_{i=1}^{n} E_i) = P(E_1)P_{E_1}(E_2)\times\cdots\times P_{E_1\cap E_2\cap\cdots\cap E_{n-1}}(E_n)$.

Au 1er tirage, on est en situation d'équiprobabilité et il y a $\binom{2n}{2}$ tirages possibles donc, $P(E_1) = \dfrac{\mathrm{Card}(E_1)}{\binom{2n}{2}} = \dfrac{n^2}{\binom{2n}{2}}$

De même, pour $i \in [\![1,n-1]\!]$, au tirage $i+1$, on a $P_{E_1\cap\cdots\cap E_i}(E_{i+1}) = \dfrac{(n-i)^2}{\binom{2(n-i)}{2}}$.

Ainsi

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right) = \frac{n^2}{\binom{2n}{2}} \times \frac{(n-1)^2}{\binom{2(n-1)}{2}} \times\cdots\times 1 = \frac{2\times n^2}{2n(2n-1)}\,\frac{2\times(n-1)^2}{(2n-2)(2n-3)} \times\cdots\times 1 = \frac{2^n(n\times(n-1)\times\ldots 1)^2}{2n(2n-1)\times\cdots\times 1} = \frac{2^n(n!)^2}{(2n)!}.$$