Indication pour l'exercice 1

Tout d'abord faire un dessin (avec des patates !).
Pour A et B deux ensembles finis quelconques, commencer par (re)démontrer la formule : $\operatorname{Card} A \cup B = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B - \operatorname{Card} A \cap B$.

Indication pour l'exercice 2

Évaluer $(1+x)^n$ en $x = 1$, d'une part directement et ensuite avec la formule du binôme de Newton. Pour la deuxième égalité commencer par dériver $x \mapsto (1+x)^n$.

Indication pour l'exercice 3

Commencer par $2^n = (3-1)^n$.

Indication pour l'exercice 4

Coder un chemin par un mot : D pour droite, H pour haut.

Indication pour l'exercice 5

Petits rappels : dans un jeu de 52 cartes il y a 4 "couleurs" (pique, cœur, carreau, trèfle) et 13 "valeurs" ($1 =$ As, $2, 3, \ldots, 10$, Valet, Dame, Roi). Une "main" c'est juste choisir 5 cartes parmi les 52, l'ordre du choix n'important pas.

Indication pour l'exercice 7

Combien y-a-t'il de choix pour l'élément de A ? Combien y-a-t'il de choix pour le sous-ensemble de $E \setminus A$?

Correction de l'exercice 1

Tout d'abord si deux ensembles finis A et B sont disjoints alors $\operatorname{Card} A \cup B = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B$.
Si maintenant A et B sont deux ensembles finis quelconques : nous décomposons $A \cup B$ en trois ensembles :

$$A \cup B = (A \setminus (A \cap B)) \cup (B \setminus (A \cap B)) \cup (A \cap B).$$

Ces trois ensembles sont disjoints deux à deux donc : $\operatorname{Card} A \cup B = \operatorname{Card} A \setminus (A \cap B) + \operatorname{Card} B \setminus (A \cap B) + \operatorname{Card} A \cap B$.
Mais pour $R \subset S$ nous avons $\operatorname{Card} S \setminus R = \operatorname{Card} S - \operatorname{Card} R$.
Donc $\operatorname{Card} A \cup B = \operatorname{Card} A - \operatorname{Card} A \cap B + \operatorname{Card} B - \operatorname{Card} A \cap B + \operatorname{Card} A \cap B$.
Donc $\operatorname{Card} A \cup B = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B - \operatorname{Card} A \cap B$.
Appliquons ceci à $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$:

$$\operatorname{Card} A \Delta B = \operatorname{Card} A \cup B - \operatorname{Card} A \cap B = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B - 2 \operatorname{Card} A \cap B.$$

Correction de l'exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction $f(x) = (1+x)^n$. Par la formule du binôme de Newton nous savons que

$$f(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k.$$

1. En calculant $f(1)$ nous avons $2^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k$.
2. En calculant $f(-1)$ nous avons $0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k$.
3. Maintenant calculons $f'(x) = n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k C_n^k x^{k-1}$. Évaluons $f'(1) = n 2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k C_n^k$.
4. Il s'agit ici de calculer la primitive F de f qui correspond à la somme : $F(x) = \frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1} - \frac{1}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k x^{k+1}$. En $F(1) = \frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k$.

Correction de l'exercice 3

L'astuce consiste à écrire $2 = 3 - 1$ (!)

$$2^n = (3-1)^n = 3 \times p + (-1)^n$$

Où $3 \times p$ $(p \in \mathbb{Z})$ représente les n premiers termes de $\sum_{k=0}^{n} C_n^k 3^k (-1)^{n-k}$ et $(-1)^n$ est le dernier terme. Donc $2^n - (-1)^n = 3p$. Si n est impair l'égalité s'écrit $2^n + 1 = 3p$ et donc $2^n + 1$ est divisible par 3. Si n est pair $2^n - 1 = 3p$ donc $2^n + 1 = 3p + 2$ qui n'est pas divisible par 3.
Pour l'autre assertion regarder $3 = 7 - 4$.

Correction de l'exercice 4

On pose $H =$ "vers le haut" et $D =$ "vers la droite". Un exemple de chemin de $(0,0)$ à (p,q) est le mot $DD\ldots DHH\ldots H$ où D est écrit p fois et H est écrit q fois. Le nombre de chemins cherché est clairement le nombre d'anagrammes du mot précédent.
Le nombre de choix de l'emplacement du H est C_{p+q}^q. Une fois que les lettres H sont placées il n'y a plus de choix pour les lettres D. Il y a donc C_{p+q}^q chemins possibles.
Remarque : si on place d'abord les lettres D alors on a C_{p+q}^p choix possibles. Mais on trouve bien sûr le même nombre de chemins car $C_{p+q}^p = C_{p+q}^{(p+q)-p} = C_{p+q}^q$.

Correction de l'exercice 5

1. Il s'agit donc de choisir 5 cartes parmi 52 : il y a donc C_{52}^5 mains différentes. Ceci peut être calculé : $C_{52}^5 = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{5!} = 2598960$.

2. Il y a 4 choix pour l'as (l'as de pique ou l'as de cœur ou ...), puis il faut choisir les 4 cartes restantes parmi 48 cartes (on ne peut pas rechoisir un as). Bilan $4 \times C_{48}^{4}$ mains comprenant exactement un as.
3. Il est beaucoup plus facile de compter d'abord les mains qui ne contiennent aucun valet : il faut choisir 5 cartes parmi 48 (on exclut les valets); il y a donc C_{48}^{5} mains ne contenant aucun valet. Les autres mains sont les mains qui contiennent au moins un valet : il y en a donc $C_{52}^{5} - C_{48}^{5}$.
4. Nous allons d'abord compter le nombre de mains que ne contiennent pas de roi ou pas de dame. Le nombre de mains qui ne contiennent pas de roi est C_{48}^{5} (comme la question 3.). Le nombre de mains qui ne contiennent pas de dame est aussi C_{48}^{5}. Le nombre de mains ne contenant pas de roi ou pas de dame *n'est pas* $C_{48}^{5} + C_{48}^{5}$, car on aurait compté deux fois les mains ne contenant ni roi, ni dame (il y a C_{44}^{5} telles mains). Le nombre de mains ne contenant pas de roi ou pas de dame est donc : $2C_{48}^{5} - C_{44}^{5}$ (on retire une fois les mains comptées deux fois !). Ce que nous cherchons ce sont toutes les autres mains : celles qui contiennent au moins un roi et au moins une dame. Leur nombre est donc : $C_{52}^{5} - 2C_{48}^{5} + C_{44}^{5}$.

Correction de l'exercice 6

1. $(6!)^2$
2. $4! \times 8!$
3. $2!2!4!4!$
4. $6^6 \times 12^6$, $4^4 \times 12^8$, $2^2 \times 4^2 \times 6^4 \times 12^4$.

Correction de l'exercice 7

Fixons un élément de A; dans $E \setminus A$ (de cardinal $n-p$), nous pouvons choisir C_{n-p}^{k} ensembles à k éléments $(k = 0, 1, \ldots, n)$. Le nombre d'ensembles dans le complémentaire de A est donc

$$\sum_{k=0}^{n-p} C_{n-p}^{k} = 2^{n-p}.$$

Pour le choix d'un élément de A nous avons p choix, donc le nombre total d'ensembles qui vérifie la condition est :

$$p2^{n-p}.$$
